上海市上海中学·编

Chuzhong
Shuxue
Fudao

初中数学辅导100天

每天30分钟

Tian

深圳市海滨中学藏书章
登录号 007760
分类 G633.6 — 49/3
年月 一九九二年五月十五日

深南中学图书馆
014775

初中数学辅导100天

上海市上海中学编写组　编

上海科技教育出版社

前　言

本书是根据国家教委最新制定的教学大纲和课本内容编写的。供初中毕业生系统复习和数学教师参考使用。

本书分代数(包括三角)、平面几何和综合练习三部分，共17个单元，安排在100天内完成。在每个单元中，把数学教材中的基础知识进行综合概括，列成图表。每天围绕教材的重点和关键，选择有启发性、针对性的例题，给出解题方法，指出容易解错的地方，并配有适量的练习，只需花30～45分钟。本书的练习题题型多样，由浅入深，其中还包括近几年来全国各省市的部分升学试题。这些题目能帮助学生更好地掌握基本概念、定理、公式和法则，提高运算、逻辑思维和逻辑表达能力，以及分析、解决问题的能力。

使用本书时应注意：学生必须先复习课本，弄清概念的涵义和定理、法则、公式的来龙去脉，掌握数学知识的内在联系，然后自行概括，再参考本书所列的纲目或图表。书中的例题学生可先自己练习，再看解答，从中领会概念的运用，学会正确思考问题的方法和表达方式。书中有部分练习题难度较大，供解题能力较强的学生选做。

本书由李海琴、陆建新、李运、仇春锦老师编写。在编写过程中，听取了许多老师的宝贵意见和建议，特此表示感谢！

本书存在的不足之处，恳请读者批评指正。

编者于1988.12.

Digitized by the Internet Archive
in 2021 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/chuzhongshuxuefu0000unse

目　录

第一部分　代　数

一、实数……（1）

第 1 天　实数有关概念……（1）

第 2 天　实数大小比较和近似数……（7）

第 3 天　平方根、算术平方根……（12）

第 4 天　实数运算……（16）

第 5 天　练习五……（20）

二、整式、分式、根式……（22）

第 6 天　整式(一)……（22）

第 7 天　整式(二)……（26）

第 8 天　因式分解(一)……（29）

第 9 天　因式分解(二)……（33）

第 10 天　练习十……（36）

第 11 天　分式(一)……（38）

第 12 天　分式(二)……（42）

第 13 天　根式(一)……（45）

第 14 天　根式(二)……（49）

第 15 天　练习十五……（53）

三、方程……（55）

第 16 天　方程的有关概念及其解……（55）

第17天　一元二次方程根的判别式、根与系数的关系……（60）
第18天　可化为一元二次方程的方程解法……（64）
第19天　练习十九……（68）
第20天　二元一次方程组的概念与解……（70）
第21天　二元二次方程组的概念与解……（75）
第22天　方程组解的讨论……（79）
第23天　列方程(组)解应用题……（82）
第24天　练习二十四……（88）
四、不等式……（90）
第25天　不等式(一)……（90）
第26天　不等式(二)……（95）
第27天　不等式(三)……（99）
五、指数与常用对数……（103）
第28天　指数概念的推广，有理指数幂的概念…（104）
第29天　有理指数幂的运算法则……（108）
第30天　对数的定义、性质、运算法则……（112）
第31天　对数的运算……（116）
第32天　练习三十二……（119）
第33天　常用对数……（121）
第34天　对数的应用……（126）
第35天　练习三十五……（128）
六、函数……（132）
第36天　直角坐标系……（132）
第37天　函数有关概念……（136）
第38天　正、反比例函数和一次函数(一)……（140）
第39天　正、反比例函数和一次函数(二)……（145）

第40天　二次函数(一)……(148)
第41天　二次函数(二)……(155)
第42天　练习四十二……(157)
七、统计初步 ……(160)
第43天　统计初步……(160)
八、解三角形 ……(165)
第44天　三角函数……(166)
第45天　三角函数间的关系…… ……(170)
第46天　解直角三角形……(174)
第47天　解直角三角形的应用……(179)
第48天　解斜三角形……(182)
第49天　解斜三角形的应用……(188)
第50天　解三角形在几何证题中的应用……(193)
第51天　练习五十一……(195)

第二部分　平面几何

一、基本概念 ……(198)
第52天　基本概念……(198)
二、相交线、平行线 ……(203)
第53天　相交线、平行线……(203)
三、三角形 ……(207)
第54天　三角形的性质……(207)
第55天　全等三角形……(212)
第56天　特殊三角形……(217)
第57天　练习五十七……(222)
四、四边形 ……(225)

第58天　平行四边形……(225)
第59天　特殊平行四边形……(229)
第60天　梯形……(232)
第61天　练习六十一……(236)
五、多边形面积 ……(237)
第62天　三角形、四边形面积……(237)
六、相似形 ……(241)
第63天　比例线段……(241)
第64天　相似三角形……(245)
第65天　射影定理……(248)
第66天　练习六十六……(251)
七、圆 ……(253)
第67天　点和圆的位置关系……(254)
第68天　直线和圆的位置关系……(258)
第69天　圆与圆的位置关系……(262)
第70天　圆与多边形……(266)
第71天　练习七十一……(271)
八、点的轨迹 ……(273)
第72天　点的轨迹……(274)
第73天　基本作图……(278)
第74天　练习七十四……(281)
九、一些几何证明的常用方法 ……(283)
第75天　怎样证明线段相等……(283)
第76天　怎样证明角相等……(288)
第77天　怎样证明线段、角的不等……(292)
第78天　怎样证明线段的和差倍分……(297)
第79天　怎样证明角的和差倍分……(302)

第 80 天　怎样证明两直线垂直……(306)
第 81 天　怎样证明两直线平行……(310)
第 82 天　怎样证明线段的等比和等积……(312)
第 83 天　练习八十三……(317)

第三部分　综 合 练 习

第 84、85 天　北京市 1988 年初中升学试卷……(319)
第 86、87 天　南京市 1988 年初中升学试卷……(322)
第 88、89 天　杭州市 1988 年初中升学试卷……(326)
第 90、91 天　南昌市 1988 年初中升学试卷……(330)
第 92、93 天　福建省 1988 年初中升学试卷……(333)
第 94、95 天　上海市 1988 年部分中学直升考试卷……(337)
第 96、97 天　上海市 1988 年初中毕业、中等学校招生文化考试试卷……(340)
第 98 天　综合练习一……(344)
第 99 天　综合练习二……(348)
第100天　综合练习三……(351)
练习题部分答案和提示 ……(356)

第一部分 代　　数

一、实　　数

本单元分5天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见下页表.

第1天　　实数有关概念

复习要求:

1. 理解实数、数轴、相反数、绝对值等概念;
2. 会用数轴上的点表示有理数;
3. 能熟练地求实数的绝对值;
4. 对字母表示数的意义加深理解.

重点:正确理解绝对值的概念及它的几何意义.

例1　把下面各数分别填入指定的集合中: -7.48, $-2^{\frac{1}{3}}$, 8.9, 29, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{6}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sin30°$, $\log_2 3$, $\operatorname{ctg}30°$, $\lg 1$, $\log_3 9$, $0.2020020002\cdots$(每两个2之间依次多一个零).

有理数集合: {　　};

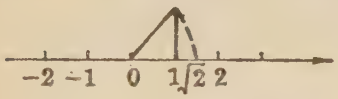
无理数集合: {　　}.

解　有理数集合: $\{-7.48, 8.9, 29, \sqrt[3]{8}, \sin30°,$

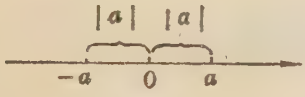
实数
- 有理数
  - 正有理数
    - 正整数
    - 正分数
  - 零
  - 负有理数
    - 负整数
    - 负分数
- 无理数
  - 正无理数
  - 负无理数

任何一个有理数都可以表示为 $\frac{m}{n}$ 的形式，其中 m，n 为互质数，且 $n\neq 0$.

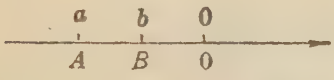
实数与数轴上的点一一对应



相反数与绝对值在数轴上表示



实数大小的比较



设点 A，B 对应实数 a，b；若点 A 在点 B 的左边，则 $a<b$；若点 A 和点 B 重合，则 $a=b$

实数的非负性
- $a^2\geqslant 0$
- $|a|\geqslant 0$
- $\sqrt{a}\geqslant 0$

运算

运算法则

运算		结果符号	绝对值
$a+b$	同号	同原加数	相加
	异号	同绝对值较大者	相减
$a\cdot b$	同号	得正	相乘
	异号	得负	

$a-b=a+(-b)$，$a\div b=a\cdot\frac{1}{b}$

运算定律

交换律 $a+b=b+a$，$a\cdot b=b\cdot a$

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$，$(ab)c=a(bc)$

分配律 $a(b+c)=ab+ac$

运算顺序

先乘方，开方；后乘除，再相加；同级运算，从左到右依次进行；有括号时，先进行括号内的运算.

科学记数法

$a\times 10^n$ 其中 $1\leqslant a<10$，n 为整数

近似值

截取法

四舍五入法：如 0.81045 精确到 0.001

$0.81045\approx 8.10\times 10^{-1}$

有效数字：8、1、0 三个

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & (a>0)\\ 0, & (a=0)\\ -a, & (a<0)\end{cases}$$

$\lg 1$，$\log_3 9\cdots\}$。

无理数集合：$\{-2^{\frac{1}{3}}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \operatorname{ctg}30°, \log_2 3,$ $0.2020020002\cdots$（每两个2之间依次多一个零）$\cdots\}$。

想一想：上列哪些数属于整数集合？如大括号内最后的“…”不写可以吗？

对实数进行分类时，应先对某些数进行计算、化简，然后根据它的最后结果进行分类，不能光看到用根号表示的数，就认为一定是无理数。例如$\sqrt[3]{8}$、$\sin 30°$等。

例2 如果a的倒数是$1+\sqrt{2}$，那么a的相反数是多少？

解 $\because \frac{1}{a}=1+\sqrt{2}$，$\therefore a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}$，$\therefore -a=\frac{-1}{1+\sqrt{2}}$ $=1-\sqrt{2}$。

$\therefore a$的相反数是$1-\sqrt{2}$。

相反数和倒数是两个重要的概念，求相反数是指用-1乘以原数，求倒数是指用1除以原数。

例3 a是实数，下列说法对吗？若不对，应附加什么条件才能使之成立？

(1) $-a$是负数；　　(2) $2a$是偶数；

(3) $|a|$是正数；　　(4) $3a>2a$；

(5) $|a|=|-a|$；　　(6) $|a|=a$；

(7) $a^2>0$；　　(8) $a^2-a>0$；

(9) $(-a)^2=-a^2$；　　(10) $(-a)^3=-a^3$。

解 (1)不对，当$a>0$时成立；

(2)不对，当a是整数时才成立；

(3)不对，当$a\neq 0$时才成立；

(4)不对，当$a>0$时才成立；

(5)对的；

(6)不对，当$a\geqslant 0$时才成立；

(7)不对，当$a\neq 0$时才成立；

(8)不对，当$a>1$或$a<0$时才成立；

(9)不对，只有$a=0$时成立；

(10)对的.

当我们判断一个含有字母式子的值的符号时，一定要考虑到字母所表示的数的取值范围(一般都分为三种情形：正、负、零)，不要以其表示形式(如符号)作为划分正、负数的标准，如以为a就是正数，$-a$就是负数，另外还应注意到字母代表零时的特殊情况.

例4 实数a、b在数轴上的对应点如图所示，

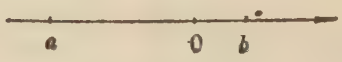


图 1-1

求：$|2a-3b-\sqrt{18}|-|3b-2a+\sqrt{8}|$的值.

解 由图示得$a<0$，$b>0$，$\therefore 2a-3b-\sqrt{18}<0$，$3b-2a+\sqrt{8}>0$.

$$\therefore |2a-3b-\sqrt{18}|-|3b-2a+\sqrt{8}|$$
$$=-(2a-3b-\sqrt{18})-(3b-2a+\sqrt{8})$$
$$=-2a+3b+\sqrt{18}-3b+2a-\sqrt{8}$$
$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

含绝对值式子的化简，其关键是正确去掉绝对值的符号.因此，首先应判定绝对值符号内代数式的值的符号，再根据绝对值定义去掉绝对值符号.

例5 已知$|a|=8$，$|b|=2$，$|a-b|=b-a$，

求：$a+b$ 的值。

解 $\because |a|=8$，$\therefore a=\pm 8$；

$\because |b|=2$，$\therefore b=\pm 2$；

又$\because |a-b|=b-a$，$\therefore b\geqslant a$。

因此 b 取 $+2$，a 取 -8，或 b 取 -2，a 取 -8。

当 $b=2$，$a=-8$ 时，$a+b=2+(-8)=-6$。

当 $b=-2$，$a=-8$ 时，$a+b=-8+(-2)=-10$。

这里应注意绝对值定义的正确应用，若 $|a|=3$，则 $a=\pm 3$，不要漏了 -3；还应注意运用 $|a-b|=b-a$ 这个条件进行分析，不要漏解和多出解来。

练 习 一

1. 填空：

(1) 在 $-\pi$，0，$\cos 60°$，$\sqrt{2}$，$\log_2\frac{1}{4}$，-1，-2 中，属于正数集合的数是_____，属于无理数集合的数是_____。

(2) 数轴三要素是_____。

(3) ____的相反数是它的本身。____的绝对值与它的倒数的和等于零。如果 $x-|x|=2x$，那么这个 x 是____。

(4) 一个数的相反数不小于它的本身，那么这个数是____。

(5) 当 $x>0$ 时，$\frac{|x|}{x}=$____，当 $x<0$ 时，$\frac{|x|}{x}=$____。

(6) 若 $x<0$，$xy>0$，且 $x<y$，

则 $|x+y|+|y-x|=$_____。

(7) 若 $\sqrt{3}x=-1$，则 $|x|$ 的相反数是____，$|x|$ 的倒数

是____.

(8) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分记为 a，小数部分记为 b，那么 $a=$____，$b=$____.

2. 选择题：

(1) 与数轴上所有的点具有“一一对应”关系的是(　　).

A 全体整数　　B 全体有理数

C 全体无理数　　D 全体实数

(2) 下列命题中正确的命题是(　　).

A 0是自然数　　B 0是正数

C 0是无理数　　D 0是整数

(3) 所有绝对值不大于3的整数有(　　).

A 3个　B 4个　C 5个　D 7个

(4) 下列说法正确的是(　　).

A 两个整数的和一定大于其中的一个数

B 有理数的绝对值都是正数

C 自然数的倒数必定是真分数

D 较小的数减去较大的数的差必定是负数

(5) 若$|a|=3$，$|b|=5$，则$|a+b|$等于(　　).

A 8　B 2　C 8或2　D ± 8或± 2

(6) 下列代数式：$x+1$，a^2，a^2-1，$|x|$，a^2+2，$(a-b)^2$，$1-(-m)^5$的值，肯定为正数的有(　　).

A 1个　B 2个　C 3个　D 以上答案都不对

(7) 若a、b、c、d是互不相等的整数，且$a\cdot b\cdot c\cdot d=9$，则$a+b+c+d$等于(　　).

A 0　B 4　C 8　D 值不能确定

3. a 为实数，求下列各式中 a 的值，并在数轴上表示.

(1) $|a|=2$ (2) $|a-2|=1$ (3) $|a|>2$ (4) $|a+1|<2$.

第 2 天　实数大小比较和近似数

复习要求：

1. 会比较实数大小；

2. 初步理解近似数的有关概念，会查平方表与立方表.

重点是实数大小的比较.

例 1　比较下列各组数的大小：

(1) -1.28 和 $-1\frac{2}{7}$

(2) $-\sqrt{0.0331}$ 和 $-\frac{2}{11}$　　(3) $a<b<0$，$\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{b}$

分析：为了比较 $-\sqrt{0.0331}$ 和 $-\frac{2}{11}$ 的大小，可比较 $\sqrt{0.0331}$ 和 $\frac{2}{11}$ 的大小，但求平方根较难计算，因此就从比较两数的平方数的大小入手.

解　(1) $|-1.28|=1.28=1\frac{28}{100}=1\frac{7}{25}=1\frac{49}{175}$，

$\left|-1\frac{2}{7}\right|=1\frac{2}{7}=1\frac{50}{175}$.

$\because 1\frac{49}{175}<1\frac{50}{175}$，

$\therefore -1.28>-1\frac{2}{7}$.

(2) $\because (\sqrt{0.0331})^2=0.0331$,

$\left(\frac{2}{11}\right)^2=\frac{4}{121}\approx 0.03306$

$\therefore (\sqrt{0.0331})^2>\left(\frac{2}{11}\right)^2$,

即$\sqrt{0.0331}>\frac{2}{11}$, $\therefore -\sqrt{0.0331}<-\frac{2}{11}$.

(3) $\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$, $a<b<0$,

$\therefore ab>0$, $b-a>0$,

$\therefore \frac{b-a}{ab}>0$,即$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$,$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

想一想：比较$\sqrt{3}+\sqrt{8}$和$2+\sqrt{7}$的大小，用何方法？

第(3)题的解法是比较两个代数式的大小常用的方法，叫做“比较法”.比较法有：

(1)“比差法”. 它的基本思想是：若$a-b>0$，则$a>b$；若$a-b<0$，则$a<b$；若$a-b=0$，则$a=b$.

一般步骤是：①作差，②变形(通常是因式分解或配方)，③判定(大于零、小于零、或等于零).

(2)“比商法”.它的基本思想是：在$a>0$，$b>0$的条件下，若$\frac{a}{b}>1$，则$a>b$；若$\frac{a}{b}<1$，则$a<b$；若$\frac{a}{b}=1$，则$a=b$.

例2 已知$a<b<0$，试比较$-a$、$|b|$、$a-b$的大小.

分析：从条件$a<b<0$出发，先确定$-a$、$|b|$、$a-b$的正负，再作比较.

解 $\because a<b<0$，$\therefore -a>-b>0$.而$-b=|b|$，$\therefore -a>$

$|b|>0$. 由 $a<b<0$，得 $a-b<0$，$\therefore a-b<|b|<-a$.

如果比较三个或三个以上数的大小，可先取正数中最大的，再取正数中较小的，然后是零，接着在负数中取绝对值较小的，再取绝对值较大的.

例 3 若 $x>0$，$y<0$，$|y|>|x|$，用不等号连接 x，y，$|y|$，$-x$.

想一想：有几种解法？

除了用例2的解法，还可以用数轴上的点表示满足条件的数，再由点在数轴上的位置而决定其大小，这样就比较直观.

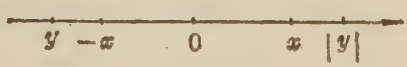


图 2-1

如图 2-1，如取满足题意条件的具体的数也比较容易判断. 此题请同学们根据 x、y 在数轴上的位置，确定它们的大小.

例 4 试证：不论 x 取任何实数，多项式 $2x^4-4x^2-1$ 的值总大于 x^4-2x^2-4 的值.

证明 $\because$ $(2x^4-4x^2-1)-(x^4-2x^2-4)$

$$=x^4-2x^2+3=(x^2-1)^2+2.$$

对于任何实数 x，总有 $(x^2-1)^2\geqslant 0$，

$$\therefore (x^2-1)^2+2>0,$$

$\therefore$ 不论 x 取任何实数，

$(2x^4-4x^2-1)-(x^4-2x-4)>0$，即多项式 $2x^4-4x^2-1$ 的值总大于 x^2-2x-4 的值. 此题变形中用的配方法是数学中常用的一种方法.

练 习 二

1. 填空：

(1) 用“>”或“<”连接：$-\frac{6}{7}$___$-\frac{5}{6}$；$5\sqrt{5}$_____$8\sqrt{2}$；$\sqrt{7}$___$1+\sqrt{3}$；$-\sqrt{10}$___$-\frac{10}{3}$；$\sqrt[3]{-\frac{1}{3}}$___$\sqrt[3]{-3}$.

(2) 把下列各式中的错误划出来，并加以改正：① $0>-9>-4$；② $-5<5>-1$；③ $10>-1<8$.

(3) 将 0.000000321 写成 $a\times10^n$ $(1\leqslant a<10)$ 的形式是_____.

(4) 查表得 $2.401^2=5.765$，那么 $240.1^2=$_____，$0.02401^2=$_____，有___个有效数字.

(5) 已知 $x>y>0$，比较大小：(填入“>”；“<”或“=”)

$|x|$___$|y|$；$-\frac{x}{2}$___$-\frac{y}{2}$；x^2___xy.

(6) 图 2-2 中 A、B、C、D 各表示一个实数，在下面空格填上“>”“=”或“<”.

① A 的相反数___C 的绝对值；

② B 的相反数___D；

③ B 的绝对值___D 的绝对值；

④ D 的绝对值与 C 的绝对值的差___A 的绝对值.

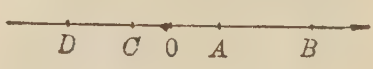


图 2-2

2. 选择题：

(1) 下列各式中错误的式子是(　　).

A $-4<-3\frac{1}{2}<-1$　　B $-\frac{4}{5}<-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}$

C $-4.708>-5.343>-5.334$

D $0.0001>0.00009>-0.00001$

(2) 把下列四个式子：(a) $\left|-\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right|$；(b) $\left|-\frac{3}{5}\right|-\left|-\frac{4}{7}\right|$；(c) $-\frac{3}{5}-\left|-\frac{4}{7}\right|$；(d) $-\left|-\frac{3}{5}\right|-\left(-\frac{4}{7}\right)$. 按从小到大的顺序排列为(　　).

A $d<c<b<a$　　B $c<d<b<a$

C $b<d<c<a$　　D $c<b<d<a$

(3) 若 $a=(-2)\cdot(-3)$, $b=(-2)^{-3}$, $c=(-3)^{-2}$, 则它们的大小关系是(　　).

A $a>b>c$　B $a>c>b$　C $c>b>a$　D $b>a>c$

(4) 已知 $4.912^2=24.13$，那么下面各式中正确的是(　　).

A $0.04912^2=0.02413$　　B $49.12^2=241300$

C $0.04912^2=0.2413$　　D $49.12^2=2413$

(5) 已知 $8.047^3=521.1$，那么下列各式中正确的是(　　).

A $80.47^3=52110$　　B $804.7^3=52110$

C $0.08047^3=0.05211$　　D $0.8047^3=0.5211$

(6) 2.598 精确到百分位是(　　).

A 2.59　B 2.600　C 2.60　D 2.6

(7) 如果一个数与它的倒数、相反数比较，总是这个数最大，并且这个数的相反数最小，那么(　　).

A 这个数是正整数　　B 这个数是负整数

C 这个数是正的真分数　　D 这个数是负的假分数

E 以上说法都不对

第3天　平方根、算术平方根

复习要求：

1．理解平方根与算术平方根、立方根概念，弄清平方根与算术平方根的区别与联系；

2．理解和熟练应用实数的三个非负性：$|a|\geqslant 0$，$a^2\geqslant 0$，$\sqrt{a}\geqslant 0(a\geqslant 0)$；

3．掌握$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0\\ -a & a<0\end{cases}$.

例1　填空：$\sqrt{81}$的平方根是____；$\sqrt{81}$的算术平方根是____；$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=$_____.

分析：　$\because\sqrt{81}=9$，而9的平方根为± 3，$\therefore\sqrt{81}$的平方根是± 3，$\sqrt{81}$的算术平方根是3．又$\because 1-\sqrt{2}<0$，$\therefore\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$。

注意平方根与算术平方根的区别与联系，正数的平方根有两个，它们互为相反数；而正数的算术平方根是这正数的平方根中正的一个．零的平方根与算术平方根都是零，负数没有平方根，也就没有算术平方根．

应用$\sqrt{a^2}=|a|$时，要注意a的取值范围。

例2　a、b是实数，下列说法对吗？若不对，应附加什么条件才能使之成立？

(1) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$；　(2) a^2的算术平方根为a；

(3) $\sqrt{a^4}=a^2$；　(4) $\sqrt{(-a)^2}=\pm a$.

解　(1)不对，当$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$时成立；

(2) 不对，当 $a\geqslant 0$ 时成立；

(3) 对的；

(4) 不对，$\sqrt{(-a)^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$

例 3 已知 $a<-6$，化简 $|3-\sqrt{(a+3)^2}|$

分析：关键是充分利用 $a<-6$ 的条件，先化简 $\sqrt{(3+a)^2}$. $\because a<-6$，$\therefore a+3<0$，$\therefore\sqrt{(3+a)^2}=-(3+a)$，$\therefore$ 原式 $=|3+3+a|$. 再去掉 $|6+a|$ 的绝对值符号，得 $-6-a$.

由于算术平方根和绝对值都是非负数，所以常把算术平方根转化为绝对值问题进行讨论，即通过 $\sqrt{a^2}=|a|$ 这一公式架起两者之间桥梁.

例 4 选择题：

一个自然数的算术平方根是 a，那么与这个自然数相邻的下一个自然数的平方根是(　　).

A $a+1$　B $\pm\sqrt{a+1}$　C a^2+1　D $\pm\sqrt{a^2+1}$

分析：(1)一个自然数的算术平方根是 a，则这个数是 a^2，(2)相邻的下一个自然数为 a^2+1，(3) a^2+1 的平方根为 $\pm\sqrt{a^2+1}$，故选 D.

这里采用的是解选择题常用的方法——直接法，即从题目条件出发，通过分析、推理或计算得出正确的结论.

例 5 已知 $\dfrac{\sqrt{x-3y}+|x^2-9|}{(x+3)^2}=0$，求 $x:y$.

分析：由题意可知 $\sqrt{x-3y}+|x^2-9|=0$. 根据非负数的性质：若干个非负数之和为零，即每个非负数必为零，由此可得 x、y 值.

解 由题意必须满足：$\begin{cases}\sqrt{x-3y}\geqslant 0,\\ |x^2-9|\geqslant 0,\\ (x+3)^2\neq 0.\end{cases}$

$\because \sqrt{x-3y} \geqslant 0$，$|x^2-9| \geqslant 0$，由原等式可得 $\begin{cases} x-3y=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$，解此方程组得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$，$\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$。但 $(x+3)^2 \neq 0$，

$\therefore x \neq -3$，$\therefore x=3$，$y=1$。

$\therefore x:y=3:1$。

这里灵活应用了实数的非负性：$|a| \geqslant 0$，$a^2 \geqslant 0$，$\sqrt{a} \geqslant 0 (a \geqslant 0)$。

解此题常易忽略 $(x+3)^2 \neq 0$，必须记住分式的分母不为零。

练 习 三

1. 填空：

(1) 0.0009的平方根是____，$|-2\frac{1}{4}|$的算术平方根是____，0的平方根是____，$-\frac{1}{8}$的立方根是____。

(2) 当 a 为实数时，a^2 的平方根是____；a^2 的算术平方根是____。

(3) $-\sqrt{(-8)^2}=$____，$\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}=$____，

$\sqrt[4]{\left(-\frac{3}{4}\right)^4}=$____，$\sqrt{37^2-12^2}=$____，

$\sqrt{0.8^2+0.6^2}=$____。

(4) $|3-\pi|+\sqrt{\pi^2-8\pi+16}=$____。

(5) 若 $25x^2-36=0$，则 $x=$____，若 $(x-1)^3=8$，则 $x=$____。

(6) 若 $\sqrt{23.6}=4.858$，则 $\sqrt{236000}=$____，

若$\sqrt[3]{5.25}=1.738$，则$\sqrt[3]{-0.00525}=$_____，若$\sqrt{169}=13$，且$\sqrt{x}=0.013$，则$x=$_____.

(7) 已知：$90.1=4.483^3=9.492^2$，$9.01=2.081^3=3.002^2$，$0.901=0.9658^3$，则①$\sqrt[3]{901000}=$_____，②$\sqrt{90100}=$_____，③ 0.0901 的立方根是_____，④ 0.0901 的平方根是_____.

(8) 若$1<m<3$，则$\sqrt{m^2-6m+9}-|1-m|=$_____.

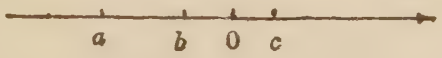


图 3-1

(9) 图中，若实数a、b、c在数轴上的对应点如图 3-1(0为原点)，则

$$\sqrt{(a+b)^2}-|c-b|-|a+c|=_____.$$

2. 选择题：

(1) 下列说法正确的是(　　).

A 一个数的正的平方根是算术根

B 一个非负数的非负平方根是算术根

C 一个正数的平方根是算术根

D 一个非零数的正的平方根是算术根

(2) 命题① 100000 的算术平方根是 1000；②-36的平方根是±6；③$(-\sqrt{6})^2$的平方根是$-\sqrt{6}$；④ 6512^2 的算术平方根是 6512. 其中正确的是(　　).

A ①②③④　B ①③　C ②④　D ④

(3) 若a、b为实数，且$(a+3)^2+\sqrt{b-\frac{1}{3}}=0$，那么$\frac{b}{a}$的值为(　　).

A 9　B $\frac{1}{9}$　C -9　D $-\frac{1}{9}$

(4) 实数 a、b 在数轴上对应点如图 3-2 所示，则 $\sqrt[4]{a^4b^4}$ 的值是(　　).

A ab　B $-ab$

C $\pm ab$　D $|a|\cdot b$

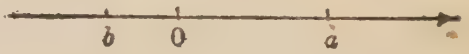


图 3-2

(5) 能使 $\sqrt{-(a^2-1)^2}$ 是一个实数的 a（实数）有(　　)个.

A 0　B 1　C 2　D 无穷多

第 4 天　实数运算

复习要求：

理解实数运算的意义，并能熟练地进行实数的混合运算.

例 1　计算：$-40\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2\div 0.5\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times[(-2)^2-2^2]$

解　原式 $=-40\frac{1}{2}\times\left(-\frac{17}{12}\right)^2\div 0.5\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times[4-4]=-\frac{81}{2}\times\frac{289}{144}\times 2\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}-0=-289$.

① 混合运算计算时要注意运算顺序，这题易犯下列错误：$\cdots(-0.5)\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\cdots$ 变为 $\cdots(-0.5\div 1-\frac{4}{3}\cdots)$ 或 $\cdots\div\frac{3}{4}\times 0$.

注意：$(-2)^2$和-2^2；$-(-5)$和$-|-5|$；$\frac{2^2}{3}$和$\left(\frac{2}{3}\right)^2$等的区别。

② 连乘除时，通常把除法转化为乘法。加法和减法，乘法和除法，乘方和开方都可以互相转化，这种把一种形式转化为另一种形式的方法是解决数学问题的重要方法。

例 2 计算$\left(3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{11}-0.125\div\frac{11}{3}\right)\div\left(1.25\div 3\frac{2}{3}\right)$.

解 原式$=\dfrac{\left(\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\frac{3}{11}}{\frac{5}{4}\times\frac{3}{11}}=\dfrac{\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right)\times 8}{\frac{5}{4}\times 8}=\frac{1}{2}$.

① 算式中有小数和分数时，常将小数化分数，要熟记$0.25=\frac{1}{4}$，$0.75=\frac{3}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$，$0.375=\frac{3}{8}$等。

② 此题算式分子中有$\frac{3}{11}$公因数，提取后(根据什么?)使计算简便，繁分数化简可应用分数的基本性质，分子、分母同乘一个适当的整数，也可简化运算。

例 3 计算：$\lg\frac{1}{5}-(-1)^0+\sqrt{(\lg 2-1)^2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

解 原式$=\lg\frac{1}{5}-1+1-\lg 2+8^{\frac{1}{3}}$

$=\lg\left(\frac{1}{5}\div 2\right)+2$

$=-1+2=1$.

注意：在$\sqrt{(\lg 2-1)^2}$中，$\because\ \lg 2-1<0$，

$\therefore\ \sqrt{(\lg 2-1)^2}=1-\lg 2$.

例 4 计算：$(\sqrt{2}+1)^{\cos 90^\circ}-\left(-1\frac{1}{2}\right)^{-2}\div(0.25)^{-\frac{1}{2}}-\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}$.

解 原式$=(\sqrt{2}+1)^0-\left(-\frac{2}{3}\right)^2\div 4^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{5}-2)+\sqrt{5}-2=1-\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}-\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-2=\frac{7}{9}$.

练 习 四

1. 填空：

(1) $0.25\times\left(-\frac{7}{8}\right)\times(-4)\times\left(1\frac{1}{7}\right)=0.25\times 4\times\frac{7}{8}\times\frac{8}{7}=1$ 这个运算应用了_____运算律.

(2) $64\times\frac{2}{5}-32\times\frac{4}{5}+78\times\frac{3}{10}-26\times\frac{7}{10}$

$=\frac{1}{5}\left(64\times 2-32\times 4+78\times\frac{3}{2}-26\times\frac{7}{2}\right)$

$=5\frac{1}{5}$，这个运算应用了_____运算律.

(3) 计算：$\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}+\sqrt{6}$（精确到 0.1）$\approx$_____.

(4) 若某数的平方为 4，则这个数的五次方是____.

(5) 若 a 为任何实数，则 a^2____0，$-a^2$____0.

(6) 在三个连续奇数中，如果中间的一个是 $2n+1$（n 为整数），那么其余的两个是_____，_____这三个连续奇数的和应是_____.

2. 选择题：

(1) 下列说法：① 零除以任何数都得零；② 零乘以任何数得零；③ 零不是正数，也不是负数；④ 零没有倒数；

⑤ 零没有相反数.其中正确的说法只有(　　).

A ①②③　B ②③⑤　C ③④⑤　D ②③④

(2) 下列说法错误的是(　　).

A 正数的偶数次幂是正数

B 负数的偶数次幂是正数

C 负数的奇数次幂是负数

D 任何数的偶次幂都是正数

(3) 绝对值小于 4 的所有正整数的和是(　　).

A 5　B 6　C 9　D 10

(4) "$-\frac{3}{4}$的立方除以$\frac{1}{2}$与$\frac{1}{3}$的差的平方的 2 倍"写成式子是(　　).

A $-\frac{3^3}{4}\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\times 2$　B $\left(-\frac{3}{4}\right)^3\div\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\times 2$　C $\left(-\frac{3}{4}\right)^3\div\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2\times 2\right]$　D $-\left(\frac{3}{4}\right)^3\div\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\times 2$

(5) $11^{17}\times 13^{11}\times 17^{13}$ 的积的末位数应是(　　).

A 1　B 3　C 7　D 9

3. 计算:

(1) $(-2^2)\cdot\left[\sqrt[3]{-27}+0.125\div\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]-\left[(-2)^2-(0.20)^{-1}\right]\cdot\left(2\frac{1}{2}\right)^2$.

(2) $(0.008)^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}-\lg\sqrt{10}+\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}+\frac{1}{2^2}\div\sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2}$.

第5天　　练　习　五

1．填空：

（1）2的相反数与$\left(-\frac{1}{2}\right)$的倒数的和的绝对值等于____.

（2）当n为自然数时，$(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}=$____.

（3）$\sqrt{25}$的平方根是____，$\sqrt{25}$的算术平方根是____.

（4）一个正整数是它的倒数的9倍，这个数是____.

（5）若$318725=3.18725\times10^{n}$，则$n=$____.

（6）若$5.197^{3}=140.4$，则$0.5197^{3}=$____.

（7）$\left|\sqrt{(\sqrt{3}-2)^{2}}-1\right|=$____.

（8）把下列各数按小到大的顺序用不等号连结起来：

$|-6|$，-3，$\left|\frac{2}{3}\right|$，0，$\sqrt{6}$，$-\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|$，$\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

_____.

（9）若三个数两两互为相反数，则三个数为_____.

2．选择题：

（1）下列语句中正确的是（　　）.

A　一个数的相反数一定是负数

B　一个数的绝对值一定不是负数

C　一个数的绝对值一定是正数

D　一个数的绝对值的相反数一定是负数

（2）如果一个非零数的绝对值等于它的相反数，那么这个数（　　）.

A　必为正数　　B　必为负数

C　一定不是负数　　D　正负不能确定

（3）如果一个实数比它的倒数小，那么这个实数的取值

范围是(　　).

A 正数　B 负数　C 大于零并且小于1的实数　D 以上答案都不对

(4) $\sqrt{-a}$ 为有理数时，则 a 是(　　).

A $a>0$，且 $-a$ 是完全平方根

B $a<0$，且 $-a$ 是非完全平方数

C $a<0$，且 $-a$ 是完全平方数

D 以上答案都不是

(5) 若 a、b 是实数，则下列四个命题中正确的命题是(　　).

A 若 $a\neq b$，则 $a^2\neq b^2$　　B 若 $a>|b|$，则 $a^2>b^2$

C 若 $|a|<|b|$，则 $a>b$　　D 若 $a^2>b^2$，则 $a>b$

(6) 实数 0.5^2，$\log_2 0.5$，$2^{0.5}$ 的大小关系是(　　).

A $0.5^2>\log_2 0.5^2>2^{0.5}$

B $\log_2 0.5>0.5^2>2^{0.5}$

C $\log_2 0.5>2^{0.5}>0.5^2$

D $2^{0.5}>0.5^2>\log_2 0.5$

3. 解下列各题：

(1) 用语言叙述下列各式所确定的实数 a、b 之间的关系或值的范围.

① $a+b=0$；　② $ab=1$；　③ $ab=0$；

④ $a^2+b^2=0$；　⑤ $a-b=0$；　⑥ $a^2+b^2>0$.

(2) 求使 $\sqrt{(x-5)^2}+|x-1|=(5-x)+(x-1)$ 成立的 x 的取值范围.

(3) 已知 $|x-2|<1$，化简 $|1-x|+\sqrt{x^2-6x+9}$.

(4) 若 $y=\sqrt{3x-1}+\sqrt{1-3x}+9$ (x、y 都是实数)，求 $\log_9 xy$.

(5) 在整数 0，1,2……9 中质数的个数是 x，偶数的个数是 y，完全平方数的个数是 z，则 $x+y+z$ 等于多少？

(6) 当 $x<-1$ 时，求 $|x-2|x-1|-\sqrt{(2-x)^2}|$ 的值.

4. 计算：

(1) $\left|-5\frac{1}{2}\right|\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{11}\div 1\frac{1}{4}$.

(2) $(-2)^3+(-2)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

(3) $(\sqrt{2}-1)^0+100^{-\frac{1}{2}}+\sqrt{(-2)^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\times\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

(5) $1-(-0.5)^{-2}+(-9)^0-\sqrt{\lg^2 100}$.

(6) $(0.027)^{-\frac{1}{3}}+16^{0.75}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^0+(-3)^{-1}$.

二、 整式、分式、根式

本单元分 10 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表 1 .

第 6 天　　整 式 (一)

复习要求：

1. 理解代数式、代数式的值、整式等概念；
2. 掌握字母表示数的方法，并会求代数式的值；
3. 熟练地进行整式的四则运算。

重点是整式的四则运算。

例 1 用代数式表示：

(1) x 的平方减去 y 的立方的差的一半；

(2) 长宽为 a、b 的长方形铁皮每个角剪去边长为 x 的正方形铁皮．求剩下部分的面积．

(3) 某商品减价 $a\%$ 后卖 m 元，那么它的原价是多少？

解 (1) $\frac{1}{2}(x^2-y^3)$；(2) $ab-4x^2$；(3) $\frac{m}{1-a\%}$．

例 2 计算(1) $x^4\cdot x^4(x^3+x^3)^4$；

(2) $(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)$；

(3) $(3x^4-4x)\div(2-x^2)$．

解 (1) 原式 $=x^8\cdot(2x^3)^4=16x^{20}$；

(2) 原式 $=8a^3-4a^2b+2ab^2-4a^2b+2ab^2-b^3$

$=8a^3-8a^2b+4ab^2-b^3$；

(3)
$$
\begin{array}{r|l}
3x^4+0+0-4x+0 & -x^2+2 \\
\cline{2-2}
3x^4\quad -6x^2 & -3x^2\quad -6 \\
\cline{1-1}
6x^2-4x+0 & \\
6x^2\quad -12 & \\
\cline{1-1}
-4x+12 &
\end{array}
$$

∴ 商式 $=-3x^2-6$，余式 $=-4x+12$．

想一想：已知除式 $=3x-5$，商式 $=2x+7$，余式 $=10$，则被除式 $=$？

注意：① 两个多项式相乘要避免漏乘，在合并前可检查项数是否等于两个多项式项数之积；

② 多项式除以多项式，只能用竖式做除法，第(3)题中切不可写成 $3x^4\div(-x^2)-4x\div 2$；

③ 被除式、除式都要按同一字母的降幂排列，凡缺项均需补零；

④ 被除式 = 除式 × 商式 + 余式

或 $\dfrac{\text{被除式}}{\text{除式}} = \text{商式} + \dfrac{\text{余式}}{\text{除式}}$.

例 3 求代数式的值：

$\frac{1}{2}a^2b-\left[\frac{3}{2}a^2b-(3abc-a^2c)-4a^2c\right]-3abc$，其中 $a=-1$，$b=-3$，$c=1$.

解 原式 $=\frac{1}{2}a^2b-\left[\frac{3}{2}a^2b-3abc+a^2c-4a^2c\right]-3abc$

$=\frac{1}{2}a^2b-\frac{3}{2}a^2b+3abc+3a^2c-3abc$

$=-a^2b+3a^2c$.

当 $a=-1$，$b=-3$，$c=1$ 时，

原式 $=-a^2b+3a^2c=-(-1)^2\times(-3)+3\times(-1)^2\times1$

$=3+3=6$.

解此类题一般先化简，再求值比较简便.

例 4 已知 $(ax+b)(x+c)\equiv-\frac{1}{2}(4x+7)-2(x+1)(x-2)$，求 a，b，c.

解 把恒等式两边的多项式分别展开，得

左边 $=ax^2+(ac+b)x+bc$；

右边 $=-2x^2+\frac{1}{2}$.

两个多项式恒等，它们对应的系数相等，得方程组

$$\begin{cases}a=-2,\\ ac+b=0,\\ bc=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解之 $\begin{cases}a=-2,\\ b=1,\\ c=\frac{1}{2}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-1,\\ c=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

此题应用待定系数法，其理论根据是多项式恒等的定理，待定系数法是数学中重要方法之一，利用它可以分解因式，求函数解析式，把某一类分式化成部分分式，以及求多项式的商式和余式等.

练 习 六

1. 填空：

(1) 表示 x 与 y 的差的立方减去 x 与 y 的立方差的代数式是_____.

(2) 计算：$a^{n+3}\cdot a^{n-2}=$_____.

(3) 一个整式加上 $xy-5ax$ 得到 $4xy-6ax$，那么这个整式减去 $xy-2ax$ 得_____.

(4) 若 m、n 为正整数，且 $m>n$，则 $a^{2m-3n}\cdot a^{2m+3n}=$_____，$a^{2m+3n}\div a^{2m-3n}=$_____.

(5) 计算：$\left(-\frac{3}{4}a^2\right)^3\cdot\left(\frac{4}{3}a^3\right)^2\div\frac{3}{4}(a^4)^2=$_____.

(6) 用盐 a 斤，水 b 斤，制成盐水，此盐水含盐的浓度是_____.

(7) 多项式 x^3-2x^2-3 除以 $x-1$ 的商式是_____，余式是_____.

(8) 已知 $a^2-6ab+9b^2-\frac{3}{2}a+\frac{9}{2}b+\frac{m}{2}$ 是完全平方式，那么 $m=$_____.

2. 选择题：

(1) 比 a 的绝对值的相反数大 b 的数是(　　).

A $-|a|+b$　B $-|a|-b$　C $-a+b$　D $-a-b$

(2) 下列各式正确的是(　　).

A $6x^6 \div 2x^2 = 3x^3$　　B $8x^3 \div 4x^2 = 2x^6$

C $a^3 \div a^3 = 0$　　D $\frac{2}{3}a^5b \div \frac{3}{2}a^5b = 1$

(3) 如果 $a = \frac{3}{4}$，$b = -\frac{1}{7}$，那么 $a^2 + ab + \frac{1}{7}$ 的值是(　　).

A 3　　B $\frac{16}{7}$　　C $\frac{67}{112}$　　D $\frac{21}{16}$

(4) 如果 $(a+b-x)^2$ 的结果中不含 x 的一次项，那么只要 a、b 满足(　　).

A $a=b$　　B $a=0$ 或 $b=0$

C $a=-b$　　D 以上答案都不对.

第7天　整　式　(二)

复习要求：

掌握乘法公式，并灵活运用乘法公式进行运算.

例1　利用乘法公式计算：

(1) $(a-2b)(-a-2b)-(a-2b)(2b-a)-(a-2b)(2a+b)$；

(2) $(3x^2-4x+5)(3x^2+4x-5)$；

(3) $[(a+b)^2+(a-b)^2](a^2-b^2)$；

(4) $(2a+b)^2(2a-b)^2(4a^2+b^2)^2$.

解　(1) 原式 $= 4b^2 - a^2 + (a-2b)^2 - (2a^2 - 3ab - 2b^2)$

$= 4b^2 - a^2 + a^2 - 4ab + 4b^2 - 2a^2 + 3ab + 2b^2$

$= -2a^2 - ab + 10b^2$.

(2) 原式 $= (3x^2)^2 - (4x-5)^2 = 9x^4 - (16x^2 - 40x +$

$25) = 9x^4 - 16x^2 + 40x - 25$.

(3) 原式 $= (2a^2 + 2b^2)(a^2 - b^2) = 2a^4 - 2b^4$.

(4) 原式 $= (4a^2 - b^2)^2(4a^2 + b^2)^2$

$= (16a^4 - b^4)^2 = 256a^8 - 32a^4b^4 + b^8$.

注意：平方差公式的特点，要正确应用.

想一想：$(x+1)(1-x)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$有哪些方法计算？哪一种方法较简便？

例 2 利用乘法公式计算：

(1) $x^{m-1}y^{2n-1}(x^m + y^n)(y^n - x^m)$；

(2) $\left(x^n + \frac{1}{2}\right)^2\left(x^{2n} - \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(x^{3n} - \frac{1}{8}\right)^2$；

(3) $(a-b)(a+b)^3 - 2ab(a^2 - b^2)$；

(4) $(x+y-z)^2 + (x-y+z)(x+y-z)$.

解 (1) 原式 $= x^{m-1}y^{2n-1}(y^{2n} - x^{2m})$

$= x^{m-1}y^{4n-1} - x^{3m-1}y^{2n-1}$.

(2) 原式 $= \left(x^{3n} + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(x^{3n} - \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{2}x^{3n}$.

(3) 原式 $= (a^2 - b^2)(a+b)^2 - 2ab(a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + 2ab + b^2 - 2ab)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^4 - b^4$.

(4) 原式 $= (x+y-z)(x+y-z+x-y+z)$

$= (x+y-z) \cdot 2x$

$= 2x^2 + 2xy - 2xz$.

注意：乘法公式和因式分解的同时应用，能使计算简便，例如(3)和(4)题.

例 3 已知 $x+y=10$，$xy=24$，求 $3x^2+3y^2$ 的值.

分析：使所求的代数式变形为关于 $x+y$ 及 xy 的代数式.

解 $3x^2+3y^2=3(x^2+y^2)=3[(x+y)^2-2xy]=3[10^2-2\times24]=3\times52=156$.

例 4 已知 $x+y+z=a$，$xy+xz+yz=b$，$xyz=c$，试用含有 a,b,c 的代数式来表示下列各式.

(1) $x^2+y^2+z^2$，　　(2) $(x-1)(y-1)(z-1)$.

解 (1) 将 $x+y+z=a$ 的两边分别平方得

$(x+y+z)^2=a^2$，

即 $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=a^2$，

$x^2+y^2+z^2=a^2-2(xy+xz+yz)$，

$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=a^2-2b$.

(2) $(x-1)(y-1)(z-1)$

$=xyz-xy-xz-yz+x+y+z-1$

$=xyz-(xy+xz+yz)+(x+y+z)-1$

$=c-b+a-1$.

注意：充分利用条件，运用乘法公式，使之与所求的式子挂起钩来.

练　习　七

1. 选择题：

(1) 计算 $(4a^2-b^2)-(2a-b)(2a+b)$ 的结果是(　　).

A $2b^2$　　B $8a^2-2b^2$　　C 0　　D $8a^2$

(2) $(x+y-2)^2=x^2+y^2+4+2xy+my+nx$，其中 m，n 分别是(　　).

A $m=2$，$n=2$　　B $m=-2$，$n=-2$

C $m=-4$，$n=-4$　　D 以上答案都不是

(3) 用乘法公式化简 $(-a-2a^n)^2$ 应得(　　).

A $4a^{n2}+4a^n+a^2$　　B $4a^{2n}-4a^{n+1}+a^2$

C $4a^{2n}+4a^{n+1}+a^2$　　D $-4a^{2n}-4a^{n+1}-a^2$

(4) 计算 $(3x+1)(-9x^2-3x-1)$，可得(　　).

A $27x^3-1$　　B $-27x^3-18x^2-6x-1$

C $-27x^3-1$　　D $1-27x^3$

(5) $a^4+a^2b^2+b^4+(M)=(a^2-b^2)^2$，则 M 为(　　).

A a^2b^2　　B 0　　C $-2a^2b^2$　　D $-3a^2b^2$

2. 填空：

(1) 写出用乘法公式计算 1.01×0.99 的过程_____.

(2) $(a^2+____)(____+____+b^6)=a^6-b^9$.

(3) 若矩形的长为$\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}b\right)$，宽为$\frac{4}{9}a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{4}b^2$，则其面积为_____.

(4) 已知 $a^2+b^2=2$，$(a+b)^2=8$，则 $(a-b)^2=$____.

3. 计算：

(1) $(a^{n+1}-y^{m+2})^2$.

(2) $(a+b-c+d)(a-b+c+d)$.

(3) $-2(a-b)(a+b)^3$.

(4) 已知 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，求 a^2+b^2 的值.

第 8 天　因式分解（一）

复习要求：

1. 了解因式分解的意义；

2. 掌握因式分解的四种方法及因式分解一般步骤.

例 1　因式分解：

(1) $4x^6y^2-16x^2y^6$；　(2) $(a+3b)^2-4(b-a)^2$；

(3) $4a(x-y)^{2n}-2b(y-x)^{2n}$；　(4) $3x^7-192xy^6$.

解　(1) 原式 $=4x^2y^2(x^4-4y^4)$

$=4x^2y^2(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)$.

(2) 原式 $=(a+3b)^2-[2(b-a)]^2$

$=(a+3b+2b-2a)(a+3b-2b+2a)$

$=(5b-a)(b+3a)$.

(3) 原式 $=2(x-y)^{2n}(2a-b)$.

(4) 原式 $=3x(x^6-64y^6)=3x(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$

$=3x(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)$

$\cdot(x^2+2xy+4y^2)$.

注意：二项式因式分解的步骤：首先要提取公因式，然后考虑公式法，平方差、立方和或立方差公式，最后要分解到不能分解为止.例如(1) $4x^6y^2-16x^2y^6$ 先提取公因式 $4x^2y^2$，而不要直接用平方差公式分解. 第(4)题中 x^6-64y^6 还可以先用立方差公式分解，再用配方法分解下去，但这样比较麻烦.

想一想：第(1)题在实数范围内，还能分解下去吗？(如没有写明在实数范围内分解，则一般是在有理数范围内分解.)

例 2　分解因式：

(1) $a^{4m+3}-2a^{2m+3}b^{2n}+a^3b^{4n}$；

(2) $(x+3y)^2+(2x+6y)(3y-4x)+(4x-3y)^2$；

(3) $x^4-13x^2y^2+4y^4$　(在实数范围内)；

(4) $2x^2-2xy-y^2$　(在实数范围内).

解　(1) 原式 $=a^3(a^{4m}-2a^{2m}b^{2n}+b^{4n})$

$=a^3(a^{2m}-b^{2n})^2$

$=a^3(a^m+b^n)^2(a^m-b^n)^2$.

(2) 原式 $=(x+3y)^2+2(x+3y)(3y-4x)+(3y-4x)^2$

$=(x+3y+3y-4x)^2=(6y-3x)^2$

$=9(2y-x)^2$.

(3) 原式 $=x^4-4x^2y^2+4y^4-9x^2y^2=(x^2-2y^2)^2-(3xy)^2$

$=(x^2-2y^2-3xy)(x^2-2y^2+3xy)$

$=(x^2-3xy-2y^2)(x^2+3xy-2y^2)$

$=\left(x-\frac{3+\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x+\right.$

$\left.\frac{3-\sqrt{17}}{2}y\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{17}}{2}y\right)$.

(4) 原式 $=2\left(x^2-xy-\frac{y^2}{2}\right)$

$=2\left(x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}y\right)$.

三项式因式分解的思考方法与二项式相同，只是在第二步，应考虑用和(差)的平方公式，十字相乘法，配方法，求根公式法，特别要注意分解到底．例如 (1) 分解到 $a^3(a^{2m}-b^{2n})^2$ 还应再分解下去，因此，因式分解的最后一步一定要检查一下每一个因式能否再分解下去．

例 3 分解因式：

(1) $1-x^2-xy-\frac{y^2}{4}$；　　(2) $a^3-a^2-ab-b^2-b^3$；

(3) $x^2-2xy+y^2+2xz-2yz+z^2$.

解 (1)原式 $=1^2-\left(x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(1+x+\frac{y}{2}\right)\left(1-x-\frac{y}{2}\right)$.

(2) 原式 $=(a-b)(a^2+ab+b^2)-(a^2+ab+b^2)$

$=(a^2+ab+b^2)(a-b-1)$.

(3) 原式 $=(x-y)^2+2z(x-y)+z^2=(x-y+z)^2$.

四项式以上(包括四项式)的因式分解，同样先考虑提取

公因式法，然后考虑分组分解法．应用分组分解法的关键在于使所分各组之间有因式可以提出或能应用公式进行分解，有的题目可能有各种分组方法，比较后，选用最佳的一种．

例 4 分解因式：

$(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)-(a^3+b^3)^2$．

解 原式 $=(a^6-b^6)-(a^3+b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)-(a^3+b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3-a^3-b^3)$

$=-2b^3(a+b)(a^2-ab+b^2)$．

分解因式有时要运用乘法公式展开后重新组合再进行分解．

掌握因式分解的一般步骤是：

① 提取公因式．

② 用公式法分解，对二次三项式可考虑用十字相乘法或求根公式．

③ 不能应用上面方法分解的多项式，可考虑用分组分解法或拆开某些项再分组分解．

④ 最后分解到每一个因式不能分解为止，若有重因式，应写成幂的形式．

练 习 八

1．选择题：

(1) 在下列从左到右的恒等变形中，是因式分解的变形为(　　)．

A $(x+2)(x^2-3)=x^3+2x^2-3x-6$

B $x^2+4x-7=(x+2)^2-11$

C $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

D $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(2) 两个连续奇数的平方差是(　　).

A 16 的倍数　B 8 的倍数　C 12 的倍数　D 4 的倍数

(3) 若 $a^2+2a+b^2-6b+10=0$，则(　　).

A $a=1,\ b=3$　　B $a=1,\ b=-3$

C $a=-1,\ b=3$　　D $a=-1,\ b=-3$

(4) 若 $2x^2+13x-7$ 能被 $x-a$ 整除，那么 a 的值一定是(　　).

A $\frac{1}{2}$或 -7　　B -7　　C $\frac{1}{2}$　D 以上答案都不对

2. 解下列各题：

(1) 因式分解：

① $2x^3-2$　　② a^3-3a^2+2a

③ $x^2+11xy+18y^2$　　④ $x^n+2x^{n+1}+x^{n+2}$

⑤ $a^2+b^2-4c^2+2ab$　　⑥ $(x-2y)^2+7x-14y+12$

⑦ x^4-3x^2+1

(2) 在实数范围内分解因式：

① $4a-4a^5$　　② x^5y-9xy^5

③ $x^2-10x+18$　　④ $2x^2-3\sqrt{2}\,x-4$

⑤ $a^4-6a^2b^2+8b^4$

3. 多项式 $x^4-2x^3-10x^2+7x+4$ 分解因式后有一个因式是 x^2+3x+1，试把原多项式在实数范围内分解因式.

第 9 天　因式分解(二)

复习要求：

1．掌握用十字相乘法和待定系数法分解因式；

2．掌握因式分解的应用．

例 1 分解因式：

(1) x^2+3x+2；　　(2) $(x^2-3)^2-3(x^2-3)+2$；

(3) $(x^2+2x)(x^2+2x-2)-3$；

(4) $(x^2+5x+6)(x^2+5x-2)-5$；

(5) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-3$；

(6) $x^4-4x^2y^2+4y^4-2x^2+4y^2-24$；

*(7) $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$．

分析：(1) 可用十字相乘法分解成 $(x+2)(x+1)$．而(2)(3)(4)可用换元方法分别把 x^2-3，x^2+2x，x^2+5 当作一个字母，可转化为(1)．

想一想：

(5) 如何转化为(4)？又如何转化为(1)？

(6) 适当分组后，如何换元转化为(1)？

(7) 把 $10x^2$ 拆成 $4x^2+6x^2$，

原式 $=x^4+4x^3+4x^2+6x^2+12x+9$

$=x^2(x+2)^2+6x(x+2)+9$．

接下去该如何换元转化为(1)？

例 2 分解因式：$x^2-xy-2y^2+x+7y-6$．

解法一 原式 $=(x-2y)(x+y)+(x+7y)-6$

$$\begin{array}{ll} x-2y & 3 \\ x+y & -2 \end{array} \quad =(x-2y+3)(x+y-2).$$

解法二 $x^2-xy-2y^2=(x-2y)(x+y)$．

设原式 $=(x-2y+m)(x+y+n)$．

那么 $x^2-xy-2y^2+x+7y-6=x^2-xy-2y^2+(m+n)x+$

注：* 选做题，大纲上不作要求．

$(m-2n)y+mn$，

根据多项式恒等，有$\begin{cases} m+n=1, \\ m-2n=7, \\ mn=-6, \end{cases}$ (*)

解得：$\begin{cases} m=3 \\ n=-2 \end{cases}$

∴ 原式$=(x-2y+3)(x+y-2)$.

方程组(*)有三个方程，但只有两个未知数，若该方程组有解，则原因式能分解，否则就不能分解.

关于两个字母的二次六项式，或者三个字母的二次齐次式的因式分解，常常可以用这两个方法.

想一想：(1)把 $x^2-xy-2y^2+x+7y-6$，看作关于 x 的二次三项式，即 $x^2+(1-y)x-2y^2+7y-6$ 如何分解因式？

(2) 如何判定 $x^2-y^2+2x+y-1$ 不可分解因式？

例 3 已知 x^4+4x^2+3x+k 有一个因式 x^2+x+1. 试求：k 值及另外的因式.

解 ∵ x^4+4x^2+3x+k 为四次多项式且有因式 x^2+x+1，∴ 它的另一个因式必为二次式.

可设 $x^4+4x^2+3x+k=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)$

$=ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c$.

比较等式两边同类项系数，得

$$\begin{cases} a=1, \\ a+b=0, \\ a+b+c=4, \\ b+c=3, \\ c=k. \end{cases}$$

从中可解得

$a=1$，$b=-1$，$c=4$，$k=4$.

∴原式$=(x^2+x+1)(x^2-x+4)$.

例 4 已知 $a+b=2$，求 $a^3+6ab+b^3$ 的值.

分析：要充分运用条件 $a+b=2$，利用因式分解把 $a^3+6ab+b^3$ 适当变形，使之有 $a+b$ 的因式，逐步代入化简求值。

解 已知 $a+b=2$，则 $a^3+6ab+b^3=a^3+b^3+6ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+6ab=2a^2-2ab+2b^2+6ab=2(a^2+2ab+b^2)=2(a+b)^2=8$。

练 习 九

1. 分解因式：

(1) $x^{2n}+6x^ny^n+8y^{2n}$

(2) $(x+1)^4+2(x^2-1)^2+(x-1)^4$

(3) $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)-3$（在实数范围内分解）

(4) $x^2-xy-2y^2-x-7y-6$（用两种方法）

(5) 若二次三项式 $2x^2-3x+m-1$ 可以在实数范围内分解因式，求 m 的值。

(6) a^3+a^2-2

(7) x^3-x+6

2. 设 $3y=x+2z$，求 $x^2-9y^2+4z^2+4xz$ 的值。

3. 设 $a(a-1)-(a^2-b)=-2$，求 $\frac{a^2+b^2}{2}-ab$ 的值。

第 10 天　　练 习 十

1. 填空：

(1) 表示 a 的 25% 与 b 的 3 倍的差的平方的代数式是 _____。

(2) 当 $a=-3\frac{3}{4}, b=-\frac{1}{3}$ 时，代数式 $\frac{a^2b^2-ab}{1-ab}$ 的值是 _____.

(3) 如果 $x-y=2\frac{1}{2}$，那么 $|2-x+y|=$ _____.

(4) 计算：$2x-\{-3y+[4x-(3x-y)]\}=$ _____.

(5) 计算：$\left(-\frac{2}{3}a^3bc^{n+1}\right)^2 \cdot 1\frac{1}{8}abc^n \div 0.5a^3b^2c^{3n}=$ _____.

2. 利用乘法公式计算：

(1) $(a-2b)(-a-2b)-(a-2b)(2b-a)$;

(2) $(1-x-y)(-1-x-y)$;

(3) $(a-2b)^2(a+2b)^2$;

(4) $(2x+y)^2(4x^2-2xy+y^2)^2$;

(5) $(a^4-2a^2b^2+b^4)\div(a+b)^2$.

3. 分解因式：

(1) x^3+2x^2-3x;

(2) $x^{2n}-2x^{2n+1}+x^{2n+2}$;

(3) $a^3-2a^2b+ab^2-ac^2$;

(4) y^2-x^2+6x-9;

(5) x^4-3x^2+1;

(6) $-2x^{5n-1}y^n+4x^{3n-1}y^{n+2}-2x^{n-1}y^{n+4}$;

(7) $a(a-1)x^2-(a-b-1)xy-b(b+1)y^2$;

(8) $x^2+xy-6y^2+2x+11y-3$.

4. 在实数范围内分解因式：

(1) $a^4-7a^2b^2+10b^4$;

(2) $(x^2-1)(x^2+2)-70$.

5. 选择题：

(1) 下列等式中成立的是(　　).

A　$3a+2b=5ab$　　B　$4m^3n-5mn^3=-m^2n$

C　$3x^2\cdot 2x^3=6x^6$　　D　$4a^3b\div(-2a^2b)=-2a$

(2) $(a^m)^3\cdot a^n$ 的运算结果是(　　).

A　a^{m^3+n}　　B　a^{3m+n}　　C　$a^{3(m+n)}$　　D　$a^{3m\cdot n}$

(3) 不论 a、b 为任何实数，$a^2+b^2-2a-4b+8$ 的值总是(　　).

A 负数　　B 0　　C 正数　　D 非负数

(4) 已知浓度为 10% 的盐水中含盐 x 千克，若再加入 $5x$ 千克盐，则盐水浓度为(　　).

A 30%　　B 40%　　C 50%　　D 60%

6. 已知 $x^2-y^2+mx+5y-6$ 可分解成两个一次因式的积，求 m 的值.

7. 求证：$x^4+y^4+(x+y)^4=2(x^2+xy+y^2)^2$.

第 11 天　　分　式　(一)

复习要求：

1. 正确理解分式的意义，掌握分式的基本性质；

2. 能熟练地进行分式的四则运算.

例 1　填空：(1) 当 x _____时，分式 $\dfrac{x+1}{x^2-2x-3}$ 有意义；(2) 当 x _____时，分式 $\dfrac{x+9}{|x|-4}$ 无意义.

解　(1) $x\neq 3$ 且 $x\neq -1$；(2) $x=\pm 4$.

注意：解(1)时，不能先约分，如先约分，就会使 x 的取值范围起变化. $x\neq 3$，且 $x\neq -1$ 中，“且”字不能少.

例 2　选择题：

如果分式$\frac{x^2-1}{x^2-x-2}$的值为零，那么x的值是(　　).

A 1　　B ± 1　　C -1　　D 2

分析：分式的值为零是指分子的值为零，并且分式要有意义，所以做这类题，要排除使分式的分母为零的x的值，故选A.

例3 计算：(1)$\frac{a^2-4}{a^2+4a+4} \div (a-2) \times \frac{a^2+3a+2}{a-2}$；

(2)$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4ab}{a^2-b^2}$；

(3)$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$.

解 (1) 原式$=\frac{(a+2)(a-2)}{(a+2)^2} \cdot \frac{1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a+1)}{a-2}$

$=\frac{a+1}{a-2}$.

(2) 原式$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2-4ab}{a^2-b^2}=0$.

(3) 原式$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$

$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{x+3-x}{x(x+3)}=\frac{3}{x(x+3)}$.

分式乘除混合运算是同一级运算，按左到右的顺序进行计算，不要犯“先乘后除”的错误．例如(1)不要犯下列错误：

原式$=\frac{(a+2)(a-2)}{(a+2)^2} \div (a-2) \cdot \frac{(a+2)(a+1)}{a-2}=\frac{a-2}{a+2}$

$\div (a+2)(a+1)=\cdots\cdots$

例4 先化简再求值：

$\left(\frac{a+1}{a^2-a}+\frac{4}{1-a^2}\right) \div \frac{a^2+2a-3}{a^2+3a}$，其中$a=\sqrt{3}-3$.

解 原式$=\left[\dfrac{a+1}{a(a-1)}+\dfrac{4}{(1-a)(1+a)}\right]\times\dfrac{a(a+3)}{(a+3)(a-1)}$

$=\dfrac{(a+1)^2-4a}{a(a-1)(a+1)}\cdot\dfrac{a(a+3)}{(a+3)(a-1)}$

$=\dfrac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+1)}=\dfrac{1}{a+1}$.

把$a=\sqrt{3}-3$代入得

原式$=\dfrac{1}{\sqrt{3}-3+1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-2}=-2-\sqrt{3}$.

这类题目一般须先化简后再代入求值，有时还需对所给的x的值也进行化简，如$x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$时，应先将$x$化为$x=2+\sqrt{2}$.

练习十一

1. 填空：

(1) 当_____时，分式$\dfrac{1+x}{x^2}$有意义.

(2) 已知$x=5$时，分式$\dfrac{4x+a}{x+2}$的值为零，则$a=$_____.

(3) 当$x=$_____时，分式$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-x}$的值为零.

(4) 化简：$-\dfrac{1-a}{b}+\dfrac{a}{b}=$_____.

(5) 当$x=$_____时，分式$\dfrac{1-|x|}{2+\dfrac{14}{2x-5}}$无意义.

2. 判断题：

(1) 有分母的代数式是分式. (　　)

(2) 分式$\dfrac{-3}{x^2+3}$的值不可能为零. (　　)

(3) $\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+y}$. (　　)

(4) $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (　　)

(5) $-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{yz+xz+xy}{xyz}$. (　　)

3. 选择题：

(1) 有理式$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{2}(a+b)$，$\frac{b}{a-b}$，$\frac{x+y}{4}$，$\frac{1}{y}+1$中分式有(　　).

A 1个　　B 2个　　C 3个　　D 4个

(2) 下列各式变号，正确的是(　　).

A $\frac{x-y}{y-x}=-\frac{y-x}{x-y}$　　B $\frac{x-y}{y-x^2}=\frac{y-x}{y-x^2}$

C $\frac{-x-1}{-y+1}=\frac{x-1}{y+1}$　　D $\frac{-x-y}{y-x}=-\frac{x+y}{y-x}$

(3) 如果把分式$\frac{x}{x+y}$中的x和y都扩大两倍，那么分式的值为(　　).

A 扩大两倍　　B 不变　　C 缩小　　D 缩小两倍

(4) 当$\frac{y}{x}$，$\frac{1}{x+y}$，$\frac{1}{y}$有意义，下列等式永远成立的是(　　).

A $\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$　　B $\frac{1}{x+y}=\frac{2}{2x+y}$

C $\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}x}$　　D $\frac{y}{x}=\frac{y+2}{x+2}$

(5) 下面的式子中　A $\frac{(a^2)^3}{a^3}=a^2$　B $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a-b$

C $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=b-a$　D $\frac{1-a^2-a}{a-a^2-a^3}=\frac{a^2+a-1}{a^3+a^2-a}=\frac{1}{a}$

正确的式子是(　　).

4. 计算:

(1) $\frac{a^3}{a+1}-a^2+a-1$

(2) $\frac{a^2-16}{a^2+2a-8}\div(a-4)\cdot\frac{a^2+4-4a}{a-2}$

(3) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x-4}\div\frac{x^4-x^2}{x^2+5x+4}\times\left(\frac{2x^2}{x^2-1}+\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{x+1}\right)^2$

第 12 天　　分　式　(二)

复习要求:

1. 选择简便的方法进行分式的四则混合运算和繁分式的化简;

2. 掌握分式的应用.

例 1　计算:$\left(1-\frac{1}{a-b}\right)^2-\left(1+\frac{1}{a-b}\right)^2$.

解法一　原式$=\left[\left(1-\frac{1}{a-b}\right)+\left(1+\frac{1}{a-b}\right)\right]\times\left[\left(1-\frac{1}{a-b}\right)-\left(1+\frac{1}{a-b}\right)\right]$

$=\left(1-\frac{1}{a-b}+1+\frac{1}{a-b}\right)\left(1-\frac{1}{a-b}-1-\frac{1}{a-b}\right)=2\left(-\frac{2}{a-b}\right)=-\frac{4}{a-b}$.

解法二　原式$=\left[1-\frac{2}{a-b}+\left(\frac{1}{a-b}\right)^2\right]-\left[1+\frac{2}{a-b}+\right.$

$$\left(\frac{1}{a-b}\right)^2\Big]$$

$$=1-\frac{2}{a-b}+\left(\frac{1}{a-b}\right)^2-1-\frac{2}{a-b}-\left(\frac{1}{a-b}\right)^2$$

$$=-\frac{4}{a-b}.$$

想一想：$\left(\frac{x+y}{x-z}-\frac{x+y}{x+z}\right)\div\frac{x+y}{x-z}$如何简便运算？

分式混合运算，首先应统观全局，弄清有哪些运算，然后观察能否应用运算法则和定律，改变运算顺序，或应用因式分解、乘法公式进行简便运算，如没有简便运算的方法，就按顺序演算，本题如先做括号内的加减法就较麻烦，而用因式分解或乘法公式计算就较为简便.

例 2 计算：$\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-2-\dfrac{1}{x-1}}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$.

解法一 原式$=\dfrac{\dfrac{x-1-2(x+1)(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}}$

$$=\frac{x-1-2x^2+2-x-1}{x^3}=\frac{-2x^2}{x^3}=-\frac{2}{x}.$$

解法二 原式$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{x+1}-2-\dfrac{1}{x-1}\right)(x^2-1)}{\left(x+\dfrac{x}{x^2-1}\right)(x^2-1)}$

$$=\frac{x-1-2(x^2-1)-(x+1)}{x(x^2-1)+x}=\frac{-2x^2}{x^3}$$

$$=-\frac{2}{x}.$$

繁分式化简，一般有两种方法：一种是分子、分母分别化简，然后相除；另一种是根据分式基本性质，分子分母同乘一个不等于零的代数式．显然，本题解法二较为简便．

例 3 若 $\dfrac{4x+1}{(x-2)(x-5)}\equiv\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-5}$，求 A、B 的值．

解 $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-5}=\dfrac{A(x-5)+B(x-2)}{(x-2)(x-5)}$

$=\dfrac{Ax-5A+Bx-2B}{(x-2)(x-5)}=\dfrac{(A+B)x+(-5A-2B)}{(x-2)(x-5)}$

$\therefore\ \begin{cases}A+B=4,\\-5A-2B=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-3,\\B=7.\end{cases}$

例 4 已知 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$，求 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$ 的值．

解 由 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x+y}$ 得，$\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{x+y}$，

$(x+y)^2=xy$，$x^2+y^2=-xy$，

$\therefore\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{-xy}{xy}=-1$．

此类题目常常要把已知条件与所求的式子进行适当的变形，要瞻前顾后，寻找它们之间的关系．

练 习 十 二

1．化简：

(1) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x-\dfrac{1}{x}}$；(2) $\dfrac{x}{1+\dfrac{1-x}{x}}$；(3) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}$．

2．计算：

(1) $\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(2) $\left(\frac{c^3}{a^2b}\right)^2\cdot\left(\frac{a^3b}{c^4}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^3$;

(3) $\left(\frac{a-b}{a-c}-\frac{a-b}{a+c}\right)^2\div\left(\frac{a-b}{a-c}\right)^2\cdot\left(\frac{a+c}{2c}\right)^2$;

(4) 若$\frac{4}{x^2-1}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$，求$A$和$B$的值；

(5) 已知$x^2+y^2-6x-8y+25=0$，则$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$的值是多少？

(6) 已知$x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$，求分式$\left|\frac{2-5x+2x^2}{2x-1}\right|$的值.

3. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.求证：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

4. 已知$6x^2+12y^2=17xy$，求$\dfrac{x}{y-\dfrac{x}{1-\dfrac{2y}{x}}}$的值.

第13天　根　式　(一)

复习要求：

掌握根式的有关概念，根式的性质和根式的运算法则.

例1　填空

(1) 已知$\sqrt[3]{2a-1}$，$\sqrt{1-b}+\sqrt{b-1}$，$\sqrt{-c^3}$，$\frac{1}{1-\sqrt{d}}$各式在实数范围内有意义，则a、b、c、d取值范围是a____，b____，c____，d____.

(2) 化简$\sqrt{x^6y^4}=$_____.

(3) 已知a、b、c为三角形三边，则$\sqrt{(a+b-c)^2}-$

$|b-a-c|=$ _____.

解 (1) a 为一切实数，$b=1$，$c<0$，$d>0$ 且 $d\neq 1$.

(2) $\sqrt{x^6y^4}=|x^3y^2|=\begin{cases}x^3y^2, & x\geqslant 0\\ -x^3y^2, & x<0\end{cases}$.

(3) 原式 $=2b-2c$.

① 求使根式有意义的字母取值范围时，要先分清是偶次根式还是奇次根式，如果是偶次根式，被开方数必须是非负数，因此可列出不等式，求得字母取值范围；如果是奇次根式，被开方数可以是任意实数.

② 根号下有分式或分母含有根式，在求字母取值范围时，要注意分母不能为零，并且偶次根式的被开方数为非负数，这两个条件必须同时满足.

例 2 下列化为最简根式的运算是否正确？对其中不正确的运算，说明原因，并加以改正.

(1) $3\sqrt{\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$;

(2) 当 $x>0$，$y>0$ 时，$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=x+y$;

(3) 当 $x\leqslant 0$ 时，$\sqrt{32x^2y}=-2x\sqrt{8y}$;

(4) 当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^{2n}}=a\sqrt{a^n}$.

解 (1) 不正确. 系数不应 3×2，而应 $\frac{3}{2}$.

(2) 不正确. x^2+y^2 不是 $x^2\cdot y^2$，故不能用乘积的算术根性质，$\sqrt{x^2+y^2}$ 已是最简根式.

(3) 不正确. $2x\sqrt{8y}$ 不是最简根式，应化为 $-4x\sqrt{2y}$.

(4) 不正确. 应该用被开方数的幂指数除以根指数. 当 $a>0$ 时，$\sqrt{a^{2n}}=\sqrt{(a^n)^2}=a^n$.

最简根式必须同时符合下列三个条件：

① 被开方数的指数与根指数是互质数；

② 被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

③ 被开方数中不含分母.

化简根式时，可按下列步骤进行：

① 约去被开方数的指数与根指数的公因数；

② 把被开方数中能开得尽方的因式移到根号外；

③ 化去根号内的分母.

例 3 判断正误，对其中错误的运算，说明错误的原因.

(1) $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$；　(2) $\sqrt{a^3}=(\sqrt{a})^3$；

(3) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$；　(4) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

(5) $a\sqrt{-\frac{1}{a}}=\sqrt{-a}$；　(6) $\sqrt[3]{-a\sqrt{a}}=-\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$

$=-\sqrt[6]{a^3}=-\sqrt{a}$.

解 第(2)(3)(6)是对的.

(1) 不对. 如果 $a\geqslant 0$，$\sqrt{a^2}=a$，$(\sqrt{a})^2=a$，那么 $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$ 成立；如果 $a<0$，$\sqrt{a^2}=-a$，$(\sqrt{a})^2$ 无意义.

(4) 不对. $\sqrt{ab}$ 中 a、b 可以同号，如果当 a、b 同为负数，$\sqrt{a}$ 和 $\sqrt{b}$ 无意义.

(5) 不对. 此题隐含 $a<0$ 的条件，$a\sqrt{\frac{-1}{a}}$ 应为 $-\sqrt{-a}$.

例 4 计算：$\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$

分析：把异次根式化为同次根式时，要运用根式的基本性质. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$（$n$、$p$ 均为大于 1 的整数），注意这个性质的条件是 $a\geqslant 0$，所以，$\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=-\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{(2-\sqrt{3})^2}=-\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}$，而不能写成 $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^2}$.

原式 $=-\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}=-1$.

想一想：此题还可以怎样计算？

例 5 计算 $\frac{1}{a}\sqrt{x^3}-(a-b)\sqrt{\frac{1}{b-a}}+\frac{2}{3}\sqrt[4]{a^2-2ab+b^2}-\sqrt{\frac{1}{x}}$.

分析：注意题目隐含的条件.

① 要使 $\sqrt{x^3}$ 及 $\sqrt{\frac{1}{x}}$ 有意义，必须使 $x>0$；

② 要使 $\sqrt{\frac{1}{b-a}}$ 有意义，必须 $b-a>0$.

解 原式 $=\frac{x}{a}\sqrt{x}-\frac{a-b}{b-a}\sqrt{b-a}+\frac{2}{3}\sqrt{b-a}-\frac{1}{x}\sqrt{x}$

$=\frac{x^2-a}{ax}\sqrt{x}+\frac{5}{3}\sqrt{b-a}$.

化简根式或异次根式相乘时，常常要运用根式的基本性质：$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a\geqslant 0$ n，p 均为大于 1 的整数)，特别要注意 $a\geqslant 0$ 这一条件，而字母的条件往往隐含在题目之中，因此要仔细审题，发现条件，切忌死套公式，盲目运算.

练 习 十 三

1. 写出下列各式成立的条件：

(1) $\sqrt{a^2-4a+4}=2-a$；　(2) $\sqrt[8]{a^4}=\sqrt{a}$；

(3) $\sqrt[9]{a^3}=\sqrt[3]{a}$；　(4) $\sqrt[3]{(a-1)^3}=1-a$.

2. 写出使各式有意义的条件：

(1) $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$；　(2) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$；　(3) $\sqrt{a}+\sqrt{-a}$；

(4) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{(2-x)(5+x)}}$.

3. 下列运算是否正确?错误的加以改正.

(1) $-2\sqrt{5}=\sqrt{(-2)^2\times 5}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$;

(2) $2=5-3=\sqrt{(5-3)^2}=\sqrt{(3-5)^2}=3-5=-2$;

(3) $x^3=\sqrt{x^6}$;

(4) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}=x-1$.

4. 选择题:

(1) $\sqrt{(-15)^2}$ 的值为(　　).

A -15　　B ± 15　　C 15　　D 无意义

(2) 如果 $a=2+\sqrt{3}$, $b=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$, 那么(　　).

A $a>b$　B $a=b$　C $a<b$　D $a=\dfrac{1}{b}$

(3) $b<0$, 将 $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 化为最简根式, 得(　　).

A $\dfrac{1}{b}\sqrt{ab}$　B $-\dfrac{1}{b}\sqrt{ab}$　C $-\dfrac{1}{b}\sqrt{-ab}$　D $b\sqrt{ab}$

5. 计算:

(1) $\sqrt{0.25}-\sqrt{\dfrac{a}{4}}+\sqrt{25}+\sqrt{\dfrac{1}{a}}$;

(2) $\dfrac{\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(3) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{1}{ab}}\right)\cdot\sqrt{ab}\,(a>0,b>0)$;

(4) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\div\sqrt{a^2+2ab+b^2}\,(a>0,b>0)$.

第 14 天　　根　式　(二)

复习要求：

1．熟练地进行根式的四则混合运算；

2．提高解综合题的能力．

例 1 计算：(1) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$；

(2) $(\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6})+\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$．

解 (1) 原式 $=[(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})]^2$

$=(18-12)^2=36$．

(2) 原式 $=[\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{6})][\sqrt{2}-(2\sqrt{3}-\sqrt{6})]+\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=2-(2\sqrt{3}-\sqrt{6})^2+(3+2\sqrt{2})=14\sqrt{2}-13$．

在第(1)题中应用 $a^2b^2=(ab)^2$ 计算，比先平方再相乘要简便得多．

在第(2)题中应用乘法公式计算较为简便．

例 2 化简：(1) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{6}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}$．

解 (1) 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{5}$．

(2) 原式 $=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{6})+(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{6}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$．

例 3 已知：$a=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$b=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，求$\sqrt{a^3+b^3-4}$的值。

分析：把 a、b 直接代入计算较麻烦，而通过对 a、b 的化简可得 $a+b=8$，$ab=1$。

$\sqrt{a^3+b^3-4}=\sqrt{(a+b)(a^2-ab+b^2)-4}$

$=\sqrt{(a+b)[(a+b)^2-3ab]-4}$。代入计算，可得结果。

解略。

例 4 如果实数 x、y 满足

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}+\sqrt{1-x^2}}{x+1}$$，求 x，y。

分析：如从解方程入手，变形困难，且方程的个数少于未知数个数，这种情况下，我们常常从涉及的基本概念进行分析思考。

由$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ 1-x^2\geqslant 0,\\ x+1\neq 0.\end{cases}$

可求得 $x=1$，$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

练 习 十 四

1. 填空：

(1) 若最简根式 $\sqrt[5a+b]{3a-b}$ 与 $\sqrt[4-a]{7a+b}$ 是同类根式，则 $a=$____，$b=$____。

(2) 计算：$\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}+\sqrt{18}-4\sqrt{\dfrac{1}{2}}=$_____。

(3) 化简：$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=$_____。

(4) 如果 $\sqrt[a^2-a]{a+5}$ 和 $\sqrt[15-3a]{5-a}$ 是同次根式，那么这两个根式的积是_____.

(5) 已知 $x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$，$y=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，则 $5x^2+xy+5y^2$ 的值是_____.

(6) 已知 $x=\sqrt{2}+1$，则 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+4$ 的值是_____.

(7) $\left(x^2\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{xy}{a}\sqrt{ab}+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\div x^2y^2\sqrt{\frac{b}{a}}$

$(a>0,b>0)=$ _____.

2. 选择题：

(1) 已知 $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，下列各式的结果是无理式的式子是(　　).

A $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$　　B a^2+b^2　　C a^2-b^2　　D $(a+b)^2$

(2) 把 $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$ 分母有理化的结果是(　　).

A $\sqrt{a}+\sqrt{a+1}$　　B $\sqrt{a}-\sqrt{a+1}$

C $-(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})$　　D $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$

(3) 若 $x\geqslant 1$，化简 $\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}$ 的结果是(　　).

A $x-\sqrt{x^2-1}$　　B $x+\sqrt{x^2-1}$

C $\sqrt{x^2-1}-x$　　D $x-\sqrt{x^2-1}$ 或 $\sqrt{x^2-1}-x$

(4) 与根式 $-\frac{m}{3}\sqrt[3]{\frac{9}{m}}$ 相等的根式是(　　).

A $-\sqrt[3]{m^2}$　　B $-\sqrt[3]{243m^2}$　　C $-\sqrt[3]{\frac{81}{m^4}}$　　D $-\sqrt[3]{\frac{1}{3}m^2}$

3. 计算：

(1) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\left(a-\frac{2}{b}\sqrt{ab}+\frac{1}{b}\right)(a>0,b>0)$；

(2) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\div\frac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$ $(a>0,b>0)$.

第 15 天　练 习 十 五

1. 填空：

(1) 当 $x=$ ____时，分式$\frac{x-2}{x^2-4}$没有意义.

(2) 当 $x=$ _____时，分式$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$无意义.

(3) 使分式$\frac{2x+2}{x^2-1}$的值为正整数时，整数 $x=$ ____.

(4) 化简：$(x<0)$

① $|x|+\sqrt{x^2}-\sqrt[3]{x^3}=$ _____.

② $\frac{1}{x}\sqrt{-x^3}+\sqrt{x^2}-x\sqrt{-\frac{1}{x}}=$ _____.

③ $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-2x+x^2}=$ _____.

(5) 计算：$(\sqrt{10}-3)^{100}(\sqrt{10}+3)^{99}=$ _____.

(6) $x+\frac{1}{x}=\sqrt{8}$，则 $x-\frac{1}{x}=$ _____.

(7) 已知 $a=3+2\sqrt{5}$　$b=3-2\sqrt{5}$，那么 $a^2b-ab^2=$ _____.

(8) 如果 $x+\frac{1}{2}<0$，那么 $\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1-4x+4x^2}=$ _____.

2. 选择题：

(1) 如果 $x=300$，则$\frac{x}{x-3}-\frac{x+6}{x^2-3x}+\frac{1}{x}$的值为(　　).

A 0　　B $\frac{101}{990}$　　C $\frac{111}{110}$　　D $\frac{101}{100}$

(2) 分式$\frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$的值为零时，x的值是(　　).

A $x=2$　B $x=-1$　C $x=2, x=-1$　D $x=1, x=2$

(3) $x-my=0$且$xy\neq 0$，则分式$\frac{x^2-2xy}{xy+2y^2}$的值为(　　).

A $\frac{m^2-2m}{m+2}$　B $\frac{1-2m}{m+2m^2}$　C $\frac{2m-1}{m+2m^2}$　D $\frac{2m-m^2}{m+2}$

(4) 当$a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$时，$\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$的值是(　　).

A 3　　B $1+2\sqrt{3}$　　C -3　　D $-1-2\sqrt{3}$

(5) 当$a>0$时，化简$\sqrt{-ax^3}$得(　　).

A $-x\sqrt{ax}$　B $x\sqrt{-ax}$　C $-x\sqrt{-ax}$　D $x\sqrt{ax}$

3. 计算：

(1) $\sqrt{45}+\frac{4}{\sqrt{2}}-\sqrt{18}-\sqrt{80}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$；

(2) $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right)\div\frac{(-1)^n x}{x^2-1}$；

(3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{18}+0.5\sqrt{48}\right)(\sqrt{2}-\sqrt{12})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$；

(4) 化简$\frac{x}{x-y}\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$；

(5) 已知$3x-y=0$，求$\left(1+\frac{2y^3}{x^3-y^3}\right)\div\left(1+\frac{2y}{x-y}\right)$的值；

(6) 计算$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$；

(7) $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right)(0<x<1)$.

三、方　程

本单元分 9 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表 2 .

第 16 天　方程的有关概念及其解

复习要求:

1. 理解方程、方程的解、解方程等概念;

2. 了解方程同解的两条原理,配方法和一元二次方程求根公式的推导;

3. 熟练地解一元一次(二次)方程。

例 1　当 x 取什么值时,代数式 $\frac{2x-5}{4}$ 和 $\frac{x+3}{5}-1$ 的值恰好互为相反数.

解　依题意,得: $\frac{2x-5}{4}=1-\frac{x+3}{5}$.

去分母,得: $5(2x-5)=20-4(x+3)$

去括号,得: $10x-25=20-4x-12$

移项、合并,得: $x=\frac{33}{14}$.

由例 1 可知,解方程的一般步骤为: ①去分母; ②去括号;③移项、合并;④两边同除以某一个数. 去分母时,要注意方程两边的各项都要乘以同一个数;去分母、去括号时,一定要注意各项的符号.

例 2　如果 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2x^2+3ax+2a=0$ 的根,

那么关于 y 的方程 $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(y-a)-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\right\}=a$ 的解是什么?

分析:在同一个问题中,相同字母表示相同的数,所以两个方程中给出的 a 是同一个数. 由方程的根的定义和前一个方程可求得 a,把所求值代入关于 y 的方程,就可得到所要求的解.

解 ∵ $x=2$ 是 $2x^2+3ax+2a=0$ 的根,

∴ $2\cdot 2^2+3a\cdot 2+2a=0$,

可得 $a=-1$.

∴关于 y 的方程可写为 $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(y+1)-\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\right\}=-1$. 去括号并化简,得 $\frac{1}{8}y-\frac{1}{4}=-1$.

$$\frac{1}{8}y=-\frac{3}{4},\quad y=-6,$$

例 3 解关于 x 的方程 $a(x-a)=b(x-b)$.

解
$$ax-a^2=bx-b^2,$$
$$(a-b)x=a^2-b^2,$$

当 $a\neq b$ 时, $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$;

当 $a=b$ 时,原方程为 $0\cdot x=0$,有无数个解.

由例 3 可看出, 在这个方程中, x 是未知数, a、b 是字母系数. 由于 $a\neq b$ 是对方程 $(a-b)x=a^2-b^2$ 继续进行同解变形的条件, 所以在方程两边同除以 $a-b$ 时,要对 $a=b$, $a\neq b$ 两种情况进行讨论.

例 4 解下列方程: (1) $16x^2=49$; (2) $4x(x-3)+3(3-x)=0$; (3) $4x^2-8x-3=0$

解 (1)用开平方法解：$16x^2=49$，$x^2=\frac{49}{16}$，

$$x=\pm\sqrt{\frac{49}{16}}，\therefore x_1=\frac{7}{4}，x_2=-\frac{7}{4}.$$

(2) 用因式分解法解：$(x-3)(4x-3)=0$，

$$x-3=0，4x-3=0，\therefore x_1=3，x_2=\frac{3}{4}.$$

(3) 解法一：用公式法解.

$\because a=4，\ b=-8，\ c=-3$，

$$\therefore x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times4\times(-3)}}{2\times4}=1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}，$$

$$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{7}}{2}，x_2=1-\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

解法二：用配方法解.

$$x^2-2x-\frac{3}{4}=0，\ x^2-2x+1=\frac{3}{4}+1，$$

$$(x-1)^2=\frac{7}{4}，\ x-1=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\therefore x_1=1+\frac{\sqrt{7}}{2}，\ x_2=1-\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

由例 4 可以看到，解一元二次方程常用的基本方法是：公式法和因式分解法. 一般地说，如可直接进行因式分解的，则用因式分解法较简便.

练 习 十 六

1. 判断题：

(1) 下列各题从方程(a)变形为方程(b)是否正确？

① (a) $1-3x=2x-9(x+3)$，

(b) $1-3x=2x-9x+3$； (　　)

② (a) $\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x}{2}-2$,

(b) $2x-2-x+2=3x-12$; ( )

③ (a) $3x+2=2-2x$,

(b) $3x-2x=2-2$; ( )

④ (a) $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+1}{3}-1$,

(b) $2x-1=x+1-1$. ( )

(2) 方程 $15x=25$ 与方程 $\frac{5}{x}=3$ 是同解方程. ( )

(3) $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程的一般形式. ( )

(4) 方程 $(a-2)x=a-2$ 的解为 $x=1$. ( )

(5) 方程 $(x-3)(x-2)=2$ 的根是 $x_1=3, x_2=2$. ( )

2. 填充:

(1) 已知 $x=2$ 是方程 $3|k|-x=6x+4$ 的解, 则 $k=$ _____.

(2) 方程 $2(2x-3)=1-2x$ 与方程 $8x-a=2(x+1)$ 是同解方程,则 $a=$ _____.

(3) 一元二次方程 $x^2+2x-7=0$ 的两根的和是_____.

(4) 若 $x=-8$ 是方程 $3x+8=\frac{x}{4}-a$ 的根, 则 $a^2-\frac{1}{a}=$ _____.

3. 选择题:

(1) $3x^2-5x=0$, $3x^2-\frac{2}{x}-1=0$, $\frac{x^2+1}{3}=x+2$, $6x^2-5xy+2y^2=0$, $ax^2+3x-x^2+5=0$, 在以上各方程中是一元二次方程的有_____.

A 2个 B 3个 C 4个 D 5个

(2) $\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{3}=1$ 的解是(　　).

A $x=-1$　　B $x=0$

C $x=\frac{4}{3}$　　D $x=-\frac{4}{3}$

(3) 方程 $3x^2+2x=8$ 的根是(　　).

A -2 和 1　　B 1 和 $1\frac{1}{3}$

C -2 和 $1\frac{1}{3}$　　D 只有 -2

(4) $2x^2+9=0$ 的根是(　　).

A $-\frac{3}{2}$　B $\pm\frac{3}{2}$　C 无实数根　D $\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$

4. 解下列方程:

(1) $3x+\dfrac{1-\dfrac{x-1}{3}}{3}-\dfrac{2-\dfrac{x-2}{3}}{4}=8$;

(2) $3+\dfrac{0.02y-0.01}{0.03}-\dfrac{0.3y-0.5}{0.2}=4.5$;

(3) $3|2x-(5x+2)|=4$;

(4) $4x^2-8x-3=0$;

(5) $y^2-12=0$;

(6) $4(x+2)^2-25(x-3)^2=0$;

(7) $a^2x-a^3=4x-8$ (关于 x 的方程).

5. k 取什么数时,方程 $\frac{2}{3}x-1=3k+5(x-k)$ 的根是正数,是负数,是零?

6. 已知 x 的方程 $x^2+3x+a=0$ 有整数根,求非负的整数 a 的值和此时方程的根.

一元二次方程根的判别式、根与系数的关系

复习要求：

1．掌握一元二次方程根的判别式，根与系数的关系；

2．能应用根的判别式判别、讨论一元二次方程的根的情况；

3．会应用根与系数的关系，求关于由两根组成的简单式子的值，能根据给定的两根求出相应的一元二次方程，能用求根方法在实数范围内分解二次三项式。

例 1 已知方程 $x^2+4x-2m=0$ 的一个根为 -3，求另一个根和 m 的值。

解 设方程的另一根是 α，由韦达定理，

得：$(-3)+\alpha=-4$ 及 $(-3)\cdot\alpha=-2m$，

解得：$\alpha=-1$，$m=-\frac{3}{2}$。

∴方程的另一根为 -1，m 的值为 $-\frac{3}{2}$。

想一想：能否利用方程的根的定义求出 m，然后解此方程。

由例 1 得出，如果已知一元二次方程的一根或两根间的关系，可应用韦达定理求解此方程。

例 2 已知二次方程 $kx^2+(k-1)x-k-\frac{1}{2}=0$，

(1) 当方程有两个不相等的实数根时，试确定 k 值的范围。

(2) 当方程的两个根的倒数和等于 4 时，求这两个根的

立方和.

解 (1) $\because k\neq 0$, $\Delta=(k-1)^2-4k(-k-\frac{1}{2})>0$,

$\therefore 5k^2+1>0$, $\therefore k$ 的取值范围是不等于零的实数,

(2) 设方程的两根为 x_1, x_2,

依题意, 得: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=4$, $\therefore \frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=4$.

$\therefore \frac{-(k-1)}{-k-\frac{1}{2}}=4$, $\therefore k=-1$.

则方程为 $-x^2-2x-\frac{3}{2}=0$.

由韦达定理, 得 $\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1\cdot x_2=\frac{3}{2} \end{cases}$,

$$\begin{aligned}\therefore x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)^3-3x_1^2x_2-3x_1x_2^2\\&=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\\&=(-2)^3-3\cdot\frac{3}{2}(-2)=1.\end{aligned}$$

由例 2(2) 中可看出,不解方程求某些含根的式子的值也是韦达定理的应用之一,其中常常要用到 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$ 这两个关系式.

例 3 如果 α、β 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根, 求作一元二次方程, 使它的两根分别为 $\alpha+\frac{1}{\beta}$、$\beta+\frac{1}{\alpha}$.

解 由韦达定理, 得: $\alpha+\beta=-\frac{3}{2}$, $\alpha\beta=-\frac{1}{2}$, 设所求两根为 y_1, y_2.

由已知，得：$y_1+y_2=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}$，

$$y_1\cdot y_2=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{(\alpha\beta+1)^2}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2},$$

∴所求作的方程为 $x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0$，

即 $$2x^2-3x-1=0.$$

例 4 已知两数的和是 $4m$，积是 $4m^2-9n^2$，求这两个数.

解 设此两数为方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，由题意，得：

$$x^2-4mx+4m^2-9n^2=0,$$

$$(x-2m-3n)(x-2m+3n)=0,$$

∴$x_1=2m+3n$，$x_2=2m-3n$.

∴此两数为 $2m+3n$ 和 $2m-3n$.

由例 3、例 4 可看出下列两种情况：已知方程的两根和与积，求作一元二次方程（一般地，两根和与积是间接给出的）；已知两数和与积，求两个数，都可应用韦达定理来解.

例 5 设一元二次方程 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 有相等的实数根. 求证 $2b=a+c$.

证一 ∵一元二次方程有相等的实数根，

$$\therefore \Delta=(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0,$$

即 $c^2-2ca+a^2-4ab+4ac+4b^2-4bc=0$.

则 $(c+a)^2-2(c+a)\cdot 2b+4b^2=0$，

∴$(c+a-2b)^2=0$，　∴$c+a-2b=0$，

∴$2b=a+c$.

证二 显然，1 是原方程的根，

∴由韦达定理，得 $x_1\cdot x_2=\frac{a-b}{b-c}=1$，即 $2b=a+c$.

练 习 十 七

1. 填充：

(1) 关于 x 的方程 $x^2-(m^2-7)x-1=0$ 的两根和为 2，则 $m=$____，判别式 $\Delta=$____.

(2) $m=$_____时，关于 x 的方程 $mx^2-3mx+(m+5)=0$ 有两相等的实数根.

(3) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m+1)x+m^2=0$ 的两根互为倒数，则 $m=$____.

(4) 已知方程 $x^2+4x-2m=0$ 的一个根 α 比另一个根 β 小 4，则 $\alpha=$____，$\beta=$____，$m=$____.

(5) 已知 α、β 是方程 $x^2+5x-3=0$ 的两个根，则 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=$____.

2. 选择题：

(1) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 有一个正根和一个负根，则 a、b、c 必须满足(　　).

A $b^2-4ac\geqslant 0, \frac{c}{a}>0$　　B $b^2-4ac>0, \frac{c}{a}>0$

C $b^2-4ac>0, \frac{c}{a}<0$　　D $b^2-4ac\geqslant 0, \frac{c}{a}<0$

(2) 关于 x 的方程 $x^2-(k+1)x+k=0$(　　).

A 有两个不相等的实数根　B 有两个相等的实数根

C 有两个不相等的实数根或有两个相等的实数根

D 没有实数根

(3) 二次方程 $2x(kx-4)-x^2+6=0$ 没有实数根，k 的最小整数值是(　　).

A -1　　B 2　　C 3　　D 4

(4) 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-3x-4=0$ 的两个实数根，则 $(x_1+1)(x_2+1)$ 的值等于（　　）.

A $-\frac{1}{2}$　　B -6　　C $\frac{1}{2}$　　D $-2\frac{1}{2}$

3. 综合题：

(1) 已知方程 $2x^2+bx+c=0$ 的两根分别为 b 和 c，求 bc.

(2) 已知方程 $x^2+2(m-2)x+m^2+4=0$ 有两个实数根，且这两个根的平方和比两根的积大 21，求 m 的值.

(3) 已知 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，$x^2-2(a+b)x+c^2+ab=0$ 是关于 x 的一元二次方程. ①若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 c 为斜边，试判断方程根的个数. ②若方程有两个相等实根，试求 c 边所对角的度数.

(4) 当 x 等于 β、γ、1 时，代数式 ax^2+bx+c 的值分别为 γ、β、4，又 β、γ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的根，求 a、b、c.

第 18 天　可化为一元二次方程的方程解法

复习要求：

1. 掌握可化为一元二次方程的简单的高次方程、分式方程、无理方程的解法；

2. 理解利用降次解方程的思想；

3. 了解将分式方程变形为整式方程，将无理方程变形为有理方程时可能产生增根，并掌握分式方程、无理方程检验增根的方法.

例 1　解方程 (1) $x^5-2x^3-x^2+2=0$；

(2) $(6x+7)^4+2(6x+7)^2-3=0$.

解 (1) 把方程左边因式分解，得：$x^3(x^2-2)-(x^2-2)=0$. $(x^2-2)(x^3-1)=0$，$\therefore x^2=2$，$x^3=1$. 因此

$$x=\pm\sqrt{2},\ x=1.$$

$\therefore$原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$，$x_3=1$.

(2) 用换元法解：令 $y=(6x+7)^2$，得 $y^2+2y-3=0$. $(y-1)(y+3)=0$，$\therefore y_1=1$，$y_2=-3$.

由 $(6x+7)^2=1$，得 $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=-1$.

而 $(6x+7)^2=-3$ 无实数解，

$\therefore$原方程的解为 $x_1=-\frac{4}{3}$，$x_2=-1$.

由例 1 可看出，解一元高次方程的基本思想是把方程降次，化成一元一次或一元二次方程再求解. 降次通常用的方法是因式分解法和换元法. 一般来说，一元 n 次方程最多有 n 个解.

例 2 解方程 (1) $\frac{x}{2x-4}+1=\frac{4-x}{x^2-2x}$；

(2) $\frac{6x+2}{x^2+3x+2}+\frac{2x^2+6x+4}{3x+1}=5$.

解 (1) 把方程变为 $\frac{x}{2(x-2)}+1=\frac{4-x}{x(x-2)}$.

方程两边同乘以 $2x(x-2)$，得：$x^2+2x(x-2)=2(4-x)$，

$\therefore 3x^2-2x-8=0$，$\therefore x_1=2$，$x_2=-\frac{4}{3}$.

经检验：$x=-\frac{4}{3}$ 是原方程的解，$x=2$ 是增根.

(2) 令 $y=\frac{x^2+3x+2}{3x+1}$，则原方程变形为 $\frac{2}{y}=5-2y$. 去

分母，得 $2y^2-5y+2=0$，$\therefore y_1=\frac{1}{2}$，$y_2=2$。

由 $\frac{x^2+3x+2}{3x+1}=\frac{1}{2}$，得：$2x^2+3x+3=0$，此方程无实数解。

由 $\frac{x^2+3x+2}{3x+1}=2$，得：$x^2-3x=0$，$\therefore x_1=0$，$x_2=3$。

经检验：$x_1=0$，$x_2=3$ 都是原方程的解。

由例 2 可看出，解分式方程的基本思想是把方程化成整式方程再求解，最后检验。转化的主要方法是通过去分母，即在方程左右两边同乘以各分母的最低公倍式。由于去分母时，所乘最低公倍式的值可能为零，因此可能产生增根，必须进行检验。对某些特殊类型的分式方程，还可采用换元法。

例 3 解方程 (1) $\sqrt{3x^2+x}+2=4x$；

(2) $(x-3)^2+\sqrt{x^2-6x+16}=13$。

解 (1) 原方程可化为：$\sqrt{3x^2+x}=4x-2$，

$$13x^2-17x+4=0.$$

解得：$x_1=1$，$x_2=\frac{4}{13}$。

经检验：$x=1$ 是原方程的根，$x=\frac{4}{13}$ 是增根。

(2) 原方程可化为 $x^2-6x+9+\sqrt{x^2-6x+16}=13$，

$x^2-6x+16+\sqrt{x^2-6x+16}-20=0$。

设 $\sqrt{x^2-6x+16}=y$，则原方程为 $y^2+y-20=0$。

解得：$y_1=4$，$y_2=-5$。

由 $\sqrt{x^2-6x+16}=4$，解得 $x_1=0$，$x_2=6$。

而 $\sqrt{x^2-6x+16}=-5$，无实数根。

经检验：原方程的根为 $x_1=0$，$x_2=6$。

由例 3 可看出，解无理方程的基本思想是把它转化为有理方程（整式方程或分式方程）再求解，最后检验。转化的主

要方法是通过乘方运算，即在方程两边乘同次方，化去方程中的根号．对某些特殊的无理方程还可应用换元法、因式分解法来求解．把无理方程转化为有理方程求解时，有可能产生增根，因此必须验根．

练 习 十 八

1．填充：

(1) 方程 $\sqrt[4]{2x+3}+\sqrt{2x+3}-6=0$ 的解是_____．

(2) 方程 $5x^3-4x^2=0$ 的根是_____．

(3) $x-2-2\sqrt{x-2}=3$ 的解是_____．

(4) 方程 $x^4+6x^3+x^2-24x-20=0$，用 $x^2+3x=y$ 来置换，则得到关于 y 的方程是_____．

(5) 方程 $2x^2+3x+3=5\sqrt{2x^2+3x+9}$，用_____$=y$ 来置换，则得到 y 的方程是_____．

2．选择题：

(1) $\sqrt{x^2-5x+2}=-1$，$\sqrt{x+1}+3=2$，$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=0$，$\sqrt{x+2}=-x\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=-2$，以上方程中无理方程的个数为(　　)．

A 1个　　B 2个　　C 3个　　D 4个

(2) 方程 $\sqrt{x+10}-\dfrac{6}{\sqrt{x+10}}=5$ 有(　　)．

A 一增根在 -5 与 -1 之间

B 一增根在 -10 与 -6 之间

C 一根在20与25之间

D 两根都是增根

(3) 方程 $(x^2-3x+2)(x-4)\cdot x=0$ 的根为(　　)．

A 4　　B 0与4　　C 1与2　　D 0、1、2、与4

3. 解下列方程：

(1) $x^3+5x^2+3x-9=0$；

(2) $\dfrac{4-8x}{x^2-4}-1=\dfrac{2x-1}{2-x}$；

(3) $\sqrt{3x+6}-2=\sqrt{x+3}-1$；

(4) $3x^2-12x-2\sqrt{x^2-4x+7}+13=0$；

(5) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=-\dfrac{3}{2}$.

第19天　练习十九

1. 填充：

(1) 用因式分解法求出方程 $x^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})x-\sqrt{15}=0$ 的两根，$x_1=$_____，$x_2=$_____.

(2) 若 $x_1=-1$ 是方程 $2x^2-ax-a^2=0$ 的根，则 $a=$_____，$x_2=$_____.

(3) 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，当_____时，只有一个根等于零，当_____时，两个根都等于零.

(4) 已知方程 $x^2-3x+a=0$ 有整数根，a 是正整数，$a=$_____，$x_1=$_____，$x_2=$_____.

(5) $x_1=\sqrt{3}+1$，$x_2=\sqrt{3}-1$ 为二次方程的两根，其方程是_____.

(6) 当 $k=$_____时，方程 $x^2-(2k-2)x+(5-2k)=0$ 有等根.

(7) 方程 $(x^2-2x+3)^2=4x^2-8x+17$ 用_____$=y$来置换，则得到关于 y 的方程是_____.

(8) 方程 $(x^2-4x+4)^2+(y^2-6y+9)^2=0$ 的解是____.

2. 选择题：

(1) 有三个方程 ①$x^2-5x+4=0$，②$x^2-16=0$，③$ax-4a-4b+bx=0$(其中 $a+b\neq 0$)，它们的公共根是(　　).

A 4　　B -4　　C 1　　D 以上都不是

(2) 方程 $x^2+x+5=\sqrt{2^2\times 6+1}-x$ 的非负解为(　　).

A 无非负解　　B 2,0　　C 2　　D 以上都不是

(3) 若一元二次方程 $x^2+\sqrt{p}x+q=0$ 有等根，那么$\frac{q}{p}$的值为(　　).

A 4　　B $\frac{1}{4}$　　C -4　　D $-\frac{1}{4}$

(4) $\sqrt{\frac{3x-2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{3x-2}}=\frac{10}{3}$ 的解的个数为(　　).

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

3. 解下列方程：

(1) $\sqrt{x+10}+2=x$；

(2) $\sqrt{x+6}+\sqrt{3x-5}-3\sqrt{x-1}=0$；

(3) $y^3-2y^2-5y+10=0$；

(4) $-3x^4-7x^2+6=0$；

(5) $\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}+1$；

(6) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}-\frac{18}{x^2+2x+1}=0$；

(7) $\left(2x-\frac{3}{x}\right)^2+12x-\frac{18}{x}+5=0$；

(8) $\lg(x-1)^2=2$.

4. 综合题：

(1) 不解方程，判别下列各方程根的情况：

① $2x^2-7x-3=0$　② $16x^2=24x-9$

③$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x+1=0$

(2) 已知一元二次方程 $x^2+px-6=0$ 的一个根为 2，求另一个根及 p。

(3) 已知方程 $2x^2-9x+8=0$，求作一个一元二次方程，使它的一个根是原方程两根之和的倒数，另一根是原方程两根差的平方。

(4) m 为何值时，方程 $3x^2-10x+m=0$ ①有两个正根；②有一正根一负根。

(5) 已知方程 $2x^2-3x+1=0$，不解这个方程，求作一元二次方程，使它的一个根是原方程两根倒数的和，另一根是原方程两根倒数的积。

(6) 方程 $x^2+(k-\sqrt{m})x-2(k-m)=0$ 的两个根为 1、-2，求 k、m 的值。

(7) 方程 $x^2+2kx=3$ 的根的平方和是 10，求 k 的绝对值。

(8) 当 m 取何值时，方程 $\frac{m}{1+x}=\frac{1}{1-x^2}+1$ 会产生增根。

第 20 天　二元一次方程组的概念与解

复习要求：

1. 理解二元一次方程和它的解集、方程组、方程组的解和解方程组等概念；

2. 能够熟练地用消元法解二元一次方程组、多于二元的一次方程组。

例 1 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+y=2 & ① \\ 5x+2y=10 & ② \end{cases}$

解 由①，得 $y=2-3x$ ③

将③代入②，得 $5x+2(2-3x)=10$

解得 $x=-6$.

将 $x=-6$ 代入③，得 $y=20$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x=-6 \\ y=20 \end{cases}$.

从上题可看到，当方程组的某个方程中，有一个未知数的系数是 1（或 −1）时，一般用代入法比较简便.

(2) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=a^2+b^2 & ① \\ x+y=a+b \end{cases}$ $(a\neq 0)$ ②

解 用加减消元法.

②×$(a-b)$，得：$(a-b)x+(a-b)y=a^2-b^2$. ③

①+③，得：$2ax=2a^2$.

∵$a\neq 0$，∴$x=a$.

把 $x=a$ 代入②，得：$y=b$.

∴原方程组的解是 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$.

由这两道例题可知，代入法或加减法都是通过“消元”，变“二元”为“一元”.

(3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=-3\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=-9\dfrac{1}{2} \end{cases}$

解 设$\frac{1}{x}=u,\frac{1}{y}=v,\frac{1}{z}=w$.

原方程组化为$\begin{cases}u-2v+w=1 & ①\\ 2u+3v-w=-3\frac{1}{2} & ②\\ 3u-v-2w=-9\frac{1}{2} & ③\end{cases}$

消去w，①+②，得 $3u+v=-2\frac{1}{2}$ ④

①×2+③，得 $5u-5v=-7\frac{1}{2}$ ⑤

由④、⑤，解得 $\begin{cases}u=-1\\ v=\frac{1}{2}\end{cases}$.

把$u=-1,v=\frac{1}{2}$代入①，得$w=3$.

即$\begin{cases}\frac{1}{x}=-1\\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{z}=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$.

经检验：原方程组的解为 $\begin{cases}x=-1\\ y=2\\ z=\frac{1}{3}\end{cases}$.

由例1(3)可看出，①设辅助未知数的方法(即换元法)，有时可将某些不是一次的方程组化为一次方程组，从而得解；②三元一次方程组的解题思路与二元一次方程组的解题思路——消元是一致的.

例 2 若方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 m、n $(m>n)$，满足条件 $\begin{cases}\lg m+\lg n=0\\ \lg(m+n)=1-2\lg 2.\end{cases}$

(1) 求这个方程；(2) 求 m、n.

分析：首先要把这个对数方程组转化为一般的方程组.

解 (1) 由已知，得 $\begin{cases}\lg(m\cdot n)=\lg 1\\ \lg(m+n)=\lg\frac{10}{4}\end{cases}$，即 $\begin{cases}m\cdot n=1\\ m+n=\frac{5}{2}\end{cases}$.

$\therefore$ 方程为 $x^2-\frac{5}{2}x+1=0$.

(2) 由 $2x^2-5x+2=0$，解得 $m=2$，$n=\frac{1}{2}$.

练 习 二 十

1. 填充：

(1) 若方程 $ax^2+bx-5=0$ 的解为 $x=\frac{1}{3}$ 和 $x=-\frac{5}{2}$，则 $a=$_____，$b=$_____.

(2) 若方程组 $\begin{cases}2x+y=m+1\\ x-y=4+n\end{cases}$ 的解为 $x=2$ 和 $y=5$，则 $m=$_____，$n=$_____.

(3) 若 x、y 的方程组 $\begin{cases}4x+y=5\\ 3x-2y=1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}ax+by=3\\ ax-by=1\end{cases}$ 有相同的解，则 $a=$_____，$b=$_____.

(4) 使 $3x+5y=k+2$ 和 $2x+3y=k$ 成立的 x、y 的值的和等于 2，则 $k=$_____.

2. 选择题：

(1) 下列方程中，二元一次方程是(　　).

A $3y-\frac{1}{x}=4+y$　B $x+7y=\frac{x-y}{5}$

C $x+2y=x-z$　D $y-5z=7x^2-2y$

(2) 下列方程组中，二元一次方程组是(　　).

A $\begin{cases}2x=3-x\\y+x=4y-1\end{cases}$　B $\begin{cases}x+y=3x-7\\4x=3z-6\end{cases}$

C $\begin{cases}x=7y-5\\2y=5x-xy+1\end{cases}$　D $\begin{cases}x-1=4y\\\frac{1}{x}=\frac{3}{y}\end{cases}$

(3) 二元一次方程 $3x+y=7$ 的正整数解的个数是(　　).

A 1个　B 2个　C 3个　D 无数个

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}5x+11y=-1\\x-3y=5\end{cases}$　(2) $\begin{cases}8x-9y=4\\-3x+4y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{3}{x-y}+\frac{2}{y-1}=2\\\frac{9}{x-y}-\frac{4}{y-1}=1\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x+2y+2z=0\\z-x=8\\x-2y=-8\end{cases}$

(5) $\begin{cases}(4\log_{\pi}\sqrt{\pi})x+(\lg 2+\lg 5)y=5\\x+\left(\lg\frac{1}{10}\right)y=1\end{cases}$

4. 已知 $|2x+y-3|+(3x-y-5)^2=0$，求实数 x、y.

5. 已知方程组 $\begin{cases}(m-1)x+2my+2=0\\2mx+(m-1)y-(m-1)=0\end{cases}$ 中的 x、y 是相反数，求 m.

6. 已知方程组 $\begin{cases}ax+by=-16\\cx+20y=-224\end{cases}$ 的解应该是 $\begin{cases}x=8\\y=-10\end{cases}$.

一个学生解题时，把 c 看错了，因此得到解为 $\begin{cases} x=12 \\ y=-13 \end{cases}$，求 a、b、c 的值.

第 21 天　二元二次方程组的概念与解

复习要求：

1. 掌握利用消元、降次解方程组的方法；

2. 会根据方程组系数的特征选用适当的方法解简单的二元二次方程组.

例 1　解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2-6x-8y=0 & ① \\ x+2y-6=0 & ② \end{cases}$

解　由②，得　$x=6-2y$　③

③代入①，得　$(6-2y)^2+y^2-6(6-2y)-8y=0$.

化简，得　$5y^2-20y=0$，$\therefore y_1=0$，$y_2=4$.

将 $y_1=0$，$y_2=4$ 分别代入③，得 $x_1=6$，$x_2=-2$.

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases} x_1=6 \\ y_1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x_2=-2 \\ y_2=4 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & ① \\ 2x^2-3xy-2y^2=0 & ② \end{cases}$

解　由②，得　$(x-2y)(2x+y)=0$.

$\therefore x-2y=0$，$2x+y=0$.

由 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-2y=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x+y=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-2\\y_2=-1\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=1\\y_3=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x_4=-1\\y_4=2\end{cases}$.

(3) $\begin{cases}x-y=1\\xy=20\end{cases}$

解 原方程组化为 $\begin{cases}x+(-y)=1\\x(-y)=-20\end{cases}$

由根与系数的关系可知，x、$-y$ 是方程 $z^2-z-20=0$ 的两个根．解之，得 $z_1=5$，$z_2=-4$．

∴方程组的解为 $\begin{cases}x_1=5\\y_1=4\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-5\end{cases}$.

从例 1 可看出，解方程组可用代入法、加减法消元，但在特殊情况下也可用韦达定理来解，这要看题目本身的情况而定．

例 2 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x^2-xy+2y^2+2x+3y-3=0\\x^2+2xy-4y^2+2x-6y+6=0\end{cases}$

分析：本题的特点是两个方程中含未知数 y 的项的系数成比例，利用加减消元法，消去 y，得到一个关于 x 的一元二次方程，从而求得原方程组的解：

$\begin{cases}x_1=-2\\y_1=-3\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-2\\y_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

$\begin{cases}x_3=0\\y_3=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}\end{cases}$，$\begin{cases}x_4=0\\y_4=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\end{cases}$.

(2) $\begin{cases}2x^2+4xy-2x-y+2=0\\3x^2+6xy-x+3y=0\end{cases}$

分析：本题的特点在于两个方程中的二次项系数对应成比例，利用加减消元法，消去所有的二次项，把它转化为第一类的二元二次方程组，从而求得原方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = \dfrac{14}{9} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 2 \end{cases}.$$

(3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 - 4xy + 3y^2 = -1 \end{cases}$

分析：本题的特点是两个方程都不含有一次项，可以通过消去常数项，再进行因式分解，把它转化为第一类的二元二次方程组，从而求得原方程组的解：

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

从例 2 可看出，解第二类的二元二次方程组时，首先应分析方程组的特征，根据不同的特征采用不同的方法.

练习二十一

1. 填充：

(1) 方程组$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = -20 \end{cases}$的解是_____.

(2) 方程组$\begin{cases} x - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{cases}$的解是_____.

(3) 方程组$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$的解是_____.

2. 选择题：

(1) 方程组$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$的解为(　　).

A $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$　B $\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-2\\y_2=-1\end{cases}$

C $\begin{cases}x=\pm 2\\y=\pm 1\end{cases}$　D $\begin{cases}x_1=2\\y_1=1\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-2\\y_2=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x_3=2\\y_3=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x_4=-2\\y_4=1\end{cases}$

(2) 满足方程组$\begin{cases}x=x^2+y^2\\y=2xy\end{cases}$的实数对$(x, y)$的数目是(　　)对.

A 0　　B 2　　C 3　　D 4

(3) 方程组$\begin{cases}y=x^2\\y=3x+k\end{cases}$有两组相同的解,那么$k=$(　　).

A $\frac{4}{9}$　　B $-\frac{4}{9}$　　C $\frac{9}{4}$　　D $-\frac{9}{4}$

(4) 方程$x^2-4x+k=0$和$2x^2-3x+k=0$有一相同的根,则k的值为(　　).

A $k=0$　　B $k=-5$　　C $k_1=1$或$k_2=-5$

D $k_1=0$或$k_2=-5$

3. 解下列方程组:

(1) $\begin{cases}x^2-4y^2+x+3y=1\\2x-y=1\end{cases}$;

(2) $\begin{cases}2x^2+5y^2-4x+y-6=0\\x^2+2y^2-2x+y-3=0\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=1\\x^2+3xy+2y^2=0\end{cases}$;

(4) $\begin{cases}x^2-2xy+3y^2=9\\4x^2-5xy+6y^2=30\end{cases}$;

(5) $\begin{cases}x^2+y^2=101\\xy=-10\end{cases}$;

(6) $\begin{cases} x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0 \\ 2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0 \end{cases}$.

4. 综合题：

(1) 方程 $x^2+(a^2-b)x-5a^2+2b^2=0$ 的两根为 1 和 -2，求 a、b.

(2) 方程 $x^2-(a+4)x+5a=0$ ①和 $x^2+(a-2)x-5a=0$ ②有一个相同的根，求 a 的值和这两个方程的根.

第 22 天　方程组解的讨论

复习要求：

在明确方程组的解的意义和掌握一元二次方程的根的判别式的基础上，进行二元一次(二次)方程组解的讨论.

例 1　解方程组并讨论 $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 6y-mx+3=0 \end{cases}$

解　原方程组整理为 $\begin{cases} 2x+3y=12 & ① \\ mx-6y=3 & ② \end{cases}$

(1) 当 $\frac{2}{m}\neq\frac{3}{-6}$，即 $m\neq-4$ 时，原方程组有唯一一组解.

①$\times m$ − ②$\times 2$，得 $(3m+12)y=12m-6$，$y=\frac{4m-2}{m+4}$.

将 $y=\frac{4m-2}{m+4}$ 代入①，得 $x=\frac{27}{m+4}$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x=\frac{27}{m+4} \\ y=\frac{4m-2}{m+4} \end{cases}$.

(2) 当$\frac{2}{m}=\frac{3}{-6}$，即 $m=-4$ 时，但$\frac{3}{-6}\neq\frac{12}{3}$，

∴方程组无解.

讨论这一类方程组解的时候应从这两个方程的未知数的系数与常数项的比例入手.

例 2 a 取什么整数时，方程组$\begin{cases}ax-y=5\\2x+3ay=7\end{cases}$ 的解满足 $x>0$，$y<0$?

解 由原方程组解得$\begin{cases}x=\frac{15a+7}{3a^2+2}\\y=\frac{7a-10}{3a^2+2}\end{cases}$.

$\because 3a^2+2>0$，$\therefore\begin{cases}15a+7>0\\7a-10<0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a>-\frac{7}{15}\\a<\frac{10}{7}\end{cases}$.

$\therefore -\frac{7}{15}<a<\frac{10}{7}$，∴由题意 $a=0$ 或 $a=1$.

讨论这一类方程组的解，实际上是通过解方程组和解不等式组来解决的.

例 3 解关于 x、y 的方程组$\begin{cases}x+2y=5m\\x-y=9m,\end{cases}$ 并且当 x、y 满足方程 $3x+2y=17$ 时，求 m 的值.

解 解方程组得$\begin{cases}x=\frac{23m}{3}\\y=-\frac{4m}{3}\end{cases}$.

以 x、y 代入 $3x+2y=17$，得

$$3\times\frac{23m}{3}+2\times\left(-\frac{4m}{3}\right)=17.$$

解得 $m=\frac{51}{61}$.

讨论这一类方程组的解，是通过解方程组及解一个一元一次方程来解决的.

例 4 当 p 为何值时，方程组 $\begin{cases} y^2-4x-2y+1=0 & ① \\ y=x+p & ② \end{cases}$

(1) 有两个不同的实数解？

(2) 有两个相同的实数解？

(3) 没有实数解？

解 ②代入①，得 $x^2+(2p-6)x+p^2-2p+1=0$，

$\therefore \Delta=(2p-6)^2-4(p^2-2p+1)=-16p+32$.

(1) 当 $\Delta>0$，即 $-16p+32>0$，即 $p<2$ 时，原方程组有两个不同的实数解.

(2) 当 $\Delta=0$，即 $-16p+32=0$，即 $p=2$ 时，原方程组有两个相同的解.

(3) 当 $\Delta<0$，即 $-16p+32<0$，即 $p>2$ 时，原方程组没有实数解.

讨论这一类的方程组的解，首先要把方程组转化为一元二次方程，然后再根据一元二次方程的根的判别式来解决.

练习二十二

1. 填充：

(1) 若方程组 $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$ 的解是以 x、y 为未知数的方程 $4x+y+2a=0$ 的一个解，则 $a=$ _____.

(2) 若二元一次方程组 $\begin{cases} x+y+m+1=0 \\ 2x-3y+13m=2 \end{cases}$ 有唯一的一组

负数解，则整数 $m=$ _____。

*(3) 若方程组 $\begin{cases}2x+my=4\\x+4y=8\end{cases}$ 的解是正数，则 $m=$ _____，若解为正整数，则 $m=$ _____。

(4) 若方程组 $\begin{cases}4x+3y=60\\kx+(k-2)y=60\end{cases}$ 的解满足 $x>y>0$，则 k 的取值范围为_____。

2. p 为何值时，方程组 $\begin{cases}3x+2y=p+1\\4x+3y=p-1\end{cases}$ 的解 $x>y$。

3. a 是什么数时，方程组 $\begin{cases}5x+3y=7\\ax-4y=3\end{cases}$ 有唯一一组解？没有解？

4. 若方程组 $\begin{cases}x-\sqrt{y-5}=0\\kx-y-2k=0\end{cases}$ 的两组解相同，试求 k 的值并解方程组。

5. k 是什么值时，方程组 $\begin{cases}y^2-4x-2y+1=0\\y=kx+2\end{cases}$

(1) 有两组相等的实数根；

(2) 有两组不相等的实数根；

(3) 无实数解。

6. 若方程组 $\begin{cases}x-y=m(1+xy)(1)\\2+x+y+xy=0(2)\end{cases}$ 有实数解，求 m 的值。

第23天　列方程(组)解应用题

复习要求：

会找出应用题中的未知量和已知量，分析各个量之间的数量关系，根据等量关系，列出一元一次(二次)方程或一次方程组，并且解得符合于题意的答案。

例 1 一个水池有甲、乙两个进水管，单独开放甲管注满水池，比单独开放乙管注满水池少用 10 小时，如果单独开放甲管 2 小时，再单独开放乙管 4 小时，就可以注满水池的$\frac{2}{5}$，求单独开放一个水管注满水池各需多少时间？

解 设甲单独注满水池需 x 小时，则乙单独注满水池需 $(x+10)$ 小时。

依题意，得$\frac{2}{x}+\frac{4}{x+10}=\frac{2}{5}$，

$\therefore x^2-5x-50=0$，有 $x_1=10$，$x_2=-5$。

经检验，$x_1=10$，$x_2=-5$ 是原方程的根，但 $x_2=-5$ 不合题意，舍去。

$$x+10=20.$$

答：甲单独注满水池需 10 小时，乙单独注满水池需 20 小时。

由例 1 可以看出根据题意列出的方程的解不一定就是应用题的解，只有当方程的解符合题意时，才是应用题的解。

例 2 甲、乙两人分别从 A、B 两地同时相向出发，相遇时乙比甲多走 4 千米，相遇后，甲再行 2 小时 30 分到 B 地，乙再行 1 小时 36 分钟到 A 地，求 A、B 两地之间的距离。

解法一 设经过 y 小时后，甲、乙相遇于 C，此时甲行 x 千米，则乙行 $(x+4)$ 千米。

依题意，得$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{x+4}{2\frac{1}{2}}\\[2ex]\dfrac{x+4}{y}=\dfrac{x}{1\frac{3}{5}}\end{cases}$.

两方程相除，得$\dfrac{x}{x+4}=\dfrac{x+4}{x}\cdot\dfrac{16}{25}$.

$\therefore\left(\dfrac{x}{x+4}\right)^2=\dfrac{16}{25}$，$\therefore\dfrac{x}{x+4}=\pm\dfrac{4}{5}$（负值舍去）.

$\therefore\begin{cases}x=16\\y=2\end{cases}$（$y$值可不求出）.

经检验，$\begin{cases}x=16\\y=2\end{cases}$是原方程组的解.

$\therefore x+(x+4)=36$.

答：B、A两地的距离为36千米.

解法二 设B、A两地相距s千米，则(1)从出发到相遇甲走了$\dfrac{s-4}{2}$千米，乙走了$\dfrac{s+4}{2}$千米；(2)甲、乙相遇后继续前进分别到达B、A两地，由此可得甲、乙的速度分别为$\dfrac{\frac{s+4}{2}}{2.5}=\dfrac{s+4}{5}$千米/小时，$\dfrac{\frac{s-4}{2}}{1.6}=\dfrac{s-4}{3.2}$千米/小时.

等量关系：甲、乙两人从出发到相遇所需的时间相等.

依题意，得$\dfrac{\frac{s-4}{2}}{\frac{s+4}{5}}=\dfrac{\frac{s+4}{2}}{\frac{s-4}{3.2}}$，

$\therefore\dfrac{5(s-4)}{2(s+4)}=\dfrac{3.2(s+4)}{2(s-4)}$.

$$\therefore 5(s-4)^2=3.2(s+4)^2,\ 0.64(s+4)^2-(s-4)^2=0,$$

$$0.8(s+4)\pm(s-4)=0.$$

$$s=36,\ s=\frac{4}{9}(\text{不合题意}).$$

经检验，$s=36$ 是原方程的解.

答：A、B 两地的距离为 36 千米.

从解法一可看出本题设了两个未知数 x 与 y，而解方程组时，只要求出 x 就可得出 A、B 两地之间的距离，y 值显然不必求，但应看到它的作用. 它是方程组中的一个元，没有它就无法建立方程组，也就无法从这个方程组中求出 x 的值，这种情况在列方程组解应用题时是常遇到的.

由例 2 可知，一个应用题往往有多种解法，可以通过直接选元或间接选元而得到不同的方程，再求解；还可以通过增加选元的个数即通过列方程组再求解. 一般地说，列方程组解应用题时，比列一元方程容易，但解方程组比解一元方程不一定容易. 因此解应用题时，应根据题目的条件，权衡各种解法的利弊，找出最简方法求解.

例 3 一个容器盛满纯酒精 20 升，第一次倒出若干升，再注满水，第二次倒出同样的升数，然后再注满水，这时容器内的纯酒精只有原来的$\frac{1}{4}$，问第一次倒出的纯酒精有多少升？

解 (1) 设未知数：

设第一次倒出的纯酒精为 x 升.

(2) 列关系式：

第一次倒出 x 升后，容器内还剩纯酒精$(20-x)$升；

第一次注满水后，容器内酒精浓度为 $\frac{20-x}{20}$；

第二次倒出 x 升后，实倒出纯酒精为 $\frac{20-x}{20}\cdot x$ 升。

(3) 找出等量关系：

两次倒出后，剩下纯酒精为 $20\times\frac{1}{4}$。

(4) 把关系式代入等量关系得方程：

$$20-x-\frac{20-x}{20}\times x=20\times\frac{1}{4}$$

解得 $x_1=10$，$x_2=30$（舍去）。

答：第一次倒出纯酒精为 10 升。

解应用题的一般步骤：

①审明题意，明确题目中的已知量和未知量，必要时可采用列表与画图方法。

②选取适当的未知数，根据题意所给的条件，找出数量之间的等量关系，列出方程（或方程组）。

③解方程（或方程组），求出未知数的值。

④检验所得结果是否符合题意，然后写出答案。

练习二十三

1. 选择题：

(1) 一件工作，甲独做 a 小时完成，乙独做 b 小时完成，甲、乙两人合做完成需要的小时数是（　　）。

A $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B $\frac{1}{ab}$　　C $\frac{1}{a+b}$　　D $\frac{ab}{a+b}$

(2) 一张试卷上有 25 个选择题，做对一题得 4 分，做错一题扣 1 分，某学生做了全部试题，一共得 70 分，则他做对了（　　）。

A 17 题　　B 18 题　　C 19 题　　D 20 题

(3) 某化肥厂原计划在 x 天内生产化肥 120 吨，由于采用了新技术，每天多生产化肥 3 吨，因此提前 2 天完成任务，则 x 适合的方程是(　　).

A $\frac{120}{x-2}=\frac{120}{x}-3$　　B $\frac{120}{x}=\frac{120}{x-2}-3$

C $\frac{120}{x+2}=\frac{120}{x}-3$　　D $\frac{120}{x}=\frac{120}{x+2}-3$

2. 应用题：

(1) 甲厂有煤 120 吨，乙厂有煤 96 吨，每天甲厂用煤 15 吨，乙厂用煤 9 吨，多少天后两厂剩下的煤相等？

(2) 甲、乙两地间的路程为 48 千米，小明骑自行车从甲地前往乙地，小华在小明出发 1 小时后，骑自行车从乙地前往甲地.当他们两人在路上相遇后，小明的速度每小时增加 4 千米而小华的速度不变，两人继续前进 2 小时后，同时分别到达目的地，求小明原来的速度和小华的速度.

(3) 两种酒精，一种浓度是 60%，另一种浓度为 90%，今要配制浓度为 70% 的酒精 300 克，每种酒精各需多少克？

(4) 某生产队粮食产量，两年内从原来的年产量 50 万千克增加到年产量 60.5 万千克，平均每年增产百分之几？

(5) 甲、乙两个工程队合做一项工程，12 天可完工，如果甲队单独做 5 天后，乙队也来参加，两队再合做 9 天才完工，问两队单独完成这项工程各需多少天？

(6) 一个二位数是一个一位数的平方，把这个一位数放在这个二位数的左边所组成的三位数，比把这个一位数放在这个二位数的右边所组成的三位数大 252，求这个二位数.

第24天　练习二十四

1．填充：

(1) 方程组$\begin{cases}2x-3y=13\\3x+y=3\end{cases}$的解是方程$kx-3y=3$的解，则$k=$_____.

(2) 方程组$\begin{cases}x+\sqrt{y-2}=0\\kx-y-2k-10=0\end{cases}$有唯一的解，则$k=$_____.

(3) 浓度为$a\%$的硫酸b千克，含纯硫酸_____千克；若再加水c千克，此时浓度为_____；如果再加纯硫酸d千克，则这时的硫酸溶液的浓度为_____.

(4) 甲、乙同走一段路程，甲走完全程需x小时，乙比甲早出发y小时而晚到z小时，则乙每小时能走全程的_____.

2．选择题：

(1) 已知$y=a+\frac{b}{x}$，其中a、b是常数，如果当$x=-1$时，$y=1$，当$x=-5$时，$y=5$，则$a+b$等于(　　).

A -1　　B 0　　C 10　　D 11

(2) 当x取1、0、-1时，二次三项式ax^2+bx+c的值分别是4、5、12．当$x=\frac{1}{1-\sqrt{2}}$时，则它的值等于(　　).

A $18+10\sqrt{2}$　　B $10+10\sqrt{2}$

C $-8-2\sqrt{2}$　　D $-10\sqrt{2}$

(3) 方程组$\begin{cases}y=\frac{4}{3}x\\x^2+y^2=25\end{cases}$的解是(　　).

A $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=4\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-3\\y_2=-4\end{cases}$　B $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=4\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=3\\y_2=4\end{cases}$

C $\begin{cases}x_1=-3\\y_1=-4\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=3\\y_2=4\end{cases}$　D $\begin{cases}x_1=-4\\y_1=-3\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=4\\y_2=3\end{cases}$

(4) 方程组$\begin{cases}ax^2+y^2=b\\xy=12\end{cases}$（　　）.

A 最多有4组解　　B 至少有一组解

C 最多有两组解　　D 当$b<0$时，方程组无解

3. 解方程组：

(1) $\begin{cases}x^2+3xy=28\\xy+4y^2=8\end{cases}$;　(2) $\begin{cases}xy+x+y+19=0\\x^2y+xy^2+20=0\end{cases}$;

(3) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}-\dfrac{3}{x-y}=-\dfrac{1}{6}\\\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x-y}=3\end{cases}$;　(4) $\begin{cases}x+\sqrt{x}\sqrt{y}+y=1\\7x+4\sqrt{x}\sqrt{y}-y=2\end{cases}$;

(5) $\begin{cases}x^2-2xy-y^2+2x+y+2=0\\2x^2-4xy-2y^2+3x+3y+4=0\end{cases}$;

(6) $\begin{cases}x+y=a\\y+z=b\\z+x=c\end{cases}$.

4. k为何值时，方程组$\begin{cases}2x-\dfrac{3}{2}y=3\\kx-5y=8\end{cases}$的解$x$、$y$同是负数.

5. 已知方程$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，当$x=-3\sqrt{2}$时，$y=2$；当$x=6$时，$y=-2\sqrt{3}$，求正数$a$和$b$的值.

6. 应用题：

(1) 校园内原有桃树和李树共25棵，现在又种桃树9

棵，李树 5 棵，这样桃树比李树多 17 棵，求原来桃树、李树各多少棵？

（2）要铺设一条 650 米长的地下管道，由甲乙两个工程队从两头相向施工，甲队每天铺设 48 米，乙队比甲队每天多铺设 22 米，乙队比甲队晚开工 1 天，问乙队开工多少天后，两队完成整个铺设任务的 80%.

（3）甲乙两端相距 300 千米，一列快车和一列慢车同时从甲站向乙站开出，2 小时后，快车在慢车前 30 千米，如果慢车从甲站开出半小时后，快车才从甲站开出，结果快车比慢车早半个小时到达乙站，求快车和慢车每小时各行多少千米？

（4）配制 10% 的硫酸溶液 1000 千克，现有 60% 的硫酸 85 千克，问还需要 98% 的硫酸和水各多少千克？

四、不 等 式

本单元分 3 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表 3.

第 25 天　　不 等 式（一）

任意两个同类量之间的数量关系有相等和不等两种情况，不等式是研究数量的不等关系. 今天的复习要求是：

1. 理解有关不等式的概念，不等式的解和解集的意义；

2. 掌握不等式的三条基本性质，不等式同解的三条原理，解一元一次不等式的一般步骤，不等式的解集在数轴上的表示法；

3. 会求某些一元一次不等式的特殊解（例如正整数解

等)。

例 1 解不等式 $x-\frac{3x-2}{4}\geqslant\frac{2(1+x)}{3}-1$，将解集在数轴上表示出来，并写出它的非负整数解。

解 去分母，得 $12x-3(3x-2)\geqslant 8(1+x)-12$。

去括号，得 $12x-9x+6\geqslant 8+8x-12$。

移项，合并同类项，得 $-5x\geqslant -10$。

两边同除以 -5，得 $x\leqslant 2$。

图 25-1

则原不等式的非负整数解为 0、1、2。

由例 1 可见，一元一次不等式与方程的解法步骤是类同的，即①去分母；②去括号；③移项；④不等式的两边各项同除以一个数。

方程的解与不等式的解结构是不同的：①方程的解一般是有限集，而不等式的解一般是无限集；②不等式在去分母与两边同除以一个数时要注意不等号是否变向，而方程就不存在这个问题。

若题中无特殊说明，则不等式的解集是指适合不等式的那部分实数全体；若题中有附加条件，则应在解出不等式的一般解集后，再找出适合条件的解集。

例 2 x 为何值时，代数式 $\frac{x}{3}-2(x+5)$ 的值 (1) 是非负数；(2) 小于 2；(3) 不大于 1。

解 (1) 依题意，得 $\frac{x}{3}-2(x+5)\geqslant 0$。

解这个不等式，得 $x\leqslant -6$。

∴当 $x\leqslant -6$ 时，$\frac{x}{3}-2(x+5)$ 的值是非负数。

(2) 依题意，得$\frac{x}{3}-2(x+5)<2$.

解这个不等式，得$x>-7.2$.

∴当$x>-7.2$时，$\frac{x}{3}-2(x+5)$的值小于2.

(3) 依题意，得$\frac{x}{3}-2(x+5)\leqslant 1$.

解不等式，得$x\geqslant -6.6$.

∴当$x\geqslant -6.6$时，$\frac{x}{3}-2(x+5)$的值不大于1.

想一想：如果题中x表示负整数，问题的结果如何？

例3 设$a>0$，$b>0$，$c<0$，而且$d>a+b$. 试比较$ad+bc$和cd的大小.

解 利用不等式的基本性质来比较.

∵ $d>a+b$，$c<0$.

∴ $cd<ac+bc$. ①(性质3)

∵ $d>0$，易见$c<d$，已知$a>0$，

∴ $ac<ad$. ②(性质2)

②式两边同加上bc， $ac+bc<ad+bc$. ③(性质1)

由①、③两式得$cd<ad+bc$.

此题还可利用两式之差与零作比较而证得.

练习二十五

1. 判断题：

(1) 若$a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. (　　)

(2) 若$a>b$，则$\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}$. (　　)

(3) 若$a>b$，则$|a|>|b|$. (　　)

(4) 若 $a>b, c<d$，则 $a-c>b-d$. (　　)

(5) 若 $a>b, c=d$，则 $ac>bd$. (　　)

(6) 若 $ac>bc$，则 $a>b$. (　　)

(7) 若 $a>b$，$c\neq 0$，则 $ac^2>bc^2$. (　　)

(8) 若 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，则 $a<b$. (　　)

2. 填充：

(1) 若 $a<b<0$，比较下列各题中的大小。

①$a-5$____$b-4$，②a^2b^3____0，③$b-a$____0，④$2a$____$2b$，⑤$|a|$____$|b|$，⑥$-b$____$-a$.

(2)

不等式 $ax<b$ 的解			图　示
$a>0$			
$a<0$			
$a=0$	$b>0$		
	$b=0$		
	$b<0$		

(3) 不等式 $4(x-1)-3(2x+5)>-24$ 的解集是_____.

(4) 不等式 $2x-5<5-2x$ 的正整数解为_____，这个不等式的解集是_____.

(5) 不等式 $9-\frac{11}{4}x>x+\frac{2}{3}$ 的自然数解的个数是____.

3. 选择题：

(1) 若 a、b 是实数，则下列四个命题中正确的命题是(　　).

A 若 $a>b$，则 $a^2>b^2$　B 若 $|a|>b$，则 $a^2>b^2$

C 若 $a \neq |b|$，则 $a^2 \neq b^2$　D 若 $a > |b|$，则 $a^2 > b^2$

(2) 下列各对不等式中，不同解的一对是(　　)。

A $3x+5>4-x$ 和 $4x>-1$　B $-4x<28$ 和 $x>-7$

C $3-2x>x+1$ 和 $-3x<-2$

D $\frac{x-3}{2}<\frac{4+2x}{-7}$ 和 $-7(x-3)>2(4+2x)$

(3) 已知 $3k-5x<2$，k 取何值时，x 不为负数(　　)。

A $k<-\frac{2}{3}$　B $k>\frac{2}{3}$　C $k\geqslant\frac{2}{3}$　D $k<\frac{2}{3}$

(4) 不等式 $\frac{5x-1}{6}-\frac{2x+1}{4}>\frac{2x}{15}-1$ 的负整数解的积为(　　)。

A -2　B 0　C 2　D 1

(5) 已知 $ax<2a(a\neq 0)$ 是关于 x 的不等式，那么它的解集是(　　)。

A $x<2$　B $x>-2$

C $x<2(a>0)$ 时或 $x>2(a<0)$ 时　D $x>2$

(6) 如果 $-a$、$1-a$、a 和 $a+1$ 四个数在数轴上所对应的点是从左到右顺序排列，那么(　　)。

A $a>0$　B $a<0$　C $a>\frac{1}{2}$　D a 为一切实数

4. 解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来：

(1) $4[x-2(x-1)]\leqslant 3x$；

(2) $x-\frac{1-\frac{3}{2}x}{4}-\frac{2-\frac{x}{4}}{3}<2$；

(3) $-5\leqslant 6-\frac{x+1}{2}\leqslant 5$；

(4) $\frac{1-ax}{2}\geqslant\frac{2ax-1}{3}-1(a<0)$.

5. 若 $a>b$,试比较 ac 与 bc 的大小.

6. a 是什么实数时，方程 $5x-2a=-4-x$ 的解在 2 和 10 之间.

7. 满足其和小于 11 的三个连续自然数有多少组？它们各是什么？

8. 已知方程 $4(x+2)-5=3a+2$ 的解小于方程 $\frac{3a+1}{3}x=\frac{a(2x+3)}{2}$ 的解，求字母 a 的取值范围.

第 26 天　不等式（二）

今天主要复习一元一次不等式组及含有绝对值的不等式的解法. 这部分内容是考纲所不要求的，安排这些内容是为了开阔同学们的解题思路，因此我们只要求了解它们的解题方法.

例 1　解不等式组 $\begin{cases}3(x-2)+1\leqslant 6(x+1)\\7-4(x-3)>5x-10\end{cases}$，并把解集在数轴上表示出来.

解　分别求出两个不等式的解集，得 $\begin{cases}x\geqslant-\frac{11}{3}\\x<\frac{29}{9}\end{cases}$,

∴原不等式的解集是 $-\frac{11}{3}\leqslant x<\frac{29}{9}$.

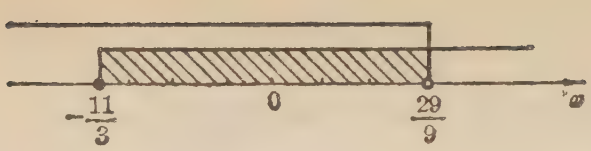


图 26-1

例 2 解不等式组 $\begin{cases} 7x-3>5x+1 \\ \frac{1}{2}x>x+\frac{1}{2} \end{cases}$，并把解集在数轴上表示出来。

解 分别求出两个不等式的解集，得 $\begin{cases} x>2 \\ x<-1 \end{cases}$，

∴ 原不等式组的解集是空集，或称不等式组无解。

图 26-2

由例 1、例 2 可知，解不等式组的关键是正确地找出各个解集的公共部分，即在数轴上互相重迭的部分。因此，借助数轴解不等式组可以避免出差错。

例 3 解不等式 $|4-3x|<2$，并将解集在数轴上表示出来。

解 ∵ $|4-3x|=|3x-4|$，

∴ 原不等式化为 $|3x-4|<2$。

则 $-2<3x-4<2$，　$2<3x<6$，$\frac{2}{3}<x<2$，

∴ 原不等式解为 $\frac{2}{3}<x<2$。

图 26-3

例 4 解不等式 $\left|\frac{1-4x}{2}\right|>3$，并将解集在数轴上表示出来。

解 原不等式可化为 $\frac{1-4x}{2}<-3$ 或 $\frac{1-4x}{2}>3$，

即 $1-4x<-6$ 或 $1-4x>6$.

$\therefore\ x>\frac{7}{4}$ 或 $x<-\frac{5}{4}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $x>\frac{7}{4}$ 或 $x<-\frac{5}{4}$.

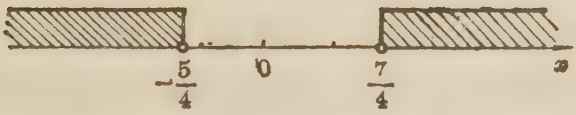


图 26-4

由例 3、例 4 可知，含绝对值的不等式，最基本的就是 $|x|>a$ 与 $|x|<a(a>0)$ 型，解这种类型的不等式首先要明确 x 的绝对值的几何意义，它的几何意义是数轴上表示这个数的点到原点的距离. 因此，$|x|>a$ 表示的是到原点距离比 a 大的点的集合；$|x|<a$ 表示的是到原点距离比 a 小的点的集合. 我们应在理解的基础上记住它们的解集，并能正确使用.

练习二十六

1. 填充：

(1) 不等式组$\begin{cases} x>-2 \\ x<-3 \end{cases}$的解集是_____;

(2) 不等式组$\begin{cases} x<4 \\ x<-1 \end{cases}$的解集是_____;

(3) 不等式组$\begin{cases} x<-1 \\ x>-5 \end{cases}$的解集是_____;

(4) 不等式组$\begin{cases} x>-3 \\ x>1 \end{cases}$的解集是_____;

(5) 不等式$|x-1|>2$的解集是_____;

(6) 适合$|x+1|<\sqrt{6}$的整数x是_____.

2. 选择题:

(1) 当$a>0$时,不等式$|x|<a$的解集是(　　).

A $x<a$　B $x>a$或$x<-a$　C $-a<x<a$　D 无解

(2) 当$a<0$时,不等式$|x|<a$的解集是(　　).

A $-a<x<a$　　B $x>a$或$x<-a$

C 无解　　D 一切实数

(3) 若不等式$|x|>a$的解集为一切实数,则(　　).

A $a>0$　B $a=0$　C $a<0$　D $a\leqslant 0$

(4) 不等式组$\begin{cases} 5x-1>3x-4 \\ -\frac{1}{3}x\leqslant\frac{2}{3}-x \end{cases}$的整数解的和为(　　).

A 1　B 0　C -1　D -2

(5) 方程组$\begin{cases} 3x+7y=k \\ 2x+5y=20 \end{cases}$的解$x$、$y$都是正数,则整数$k$应等于(　　).

A 27　B 28　C 29　D 30

3. 解下列不等式或不等式组,并将解集在数轴上表示出

来：

(1) $\begin{cases} 3x-5>2x+3 \\ \dfrac{x-5}{2}<3x-1 \end{cases}$；(2) $\begin{cases} 1-\dfrac{x-1}{2}<2-\dfrac{x-1}{3} \\ x(x-1)>(x+3)(x-3) \end{cases}$；

(3) $\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}\geqslant 2 \\ |x-2|<10 \end{cases}$；(4) $|5-2x|\geqslant 3$；

(5) $|\lg x-1|<2$.

4. 求可同时满足 $6x+\frac{5}{7}>4x+7$ 和 $8x+3<4x+50$ 的 x 的整数解。

第27天　不等式（三）

复习要求：

今天的内容考纲不要求，所以只要求学生了解一元二次不等式及分式不等式的解题规律，以开阔同学们的思路。

例1　解不等式 $x\left(\frac{1}{2}-x\right)>-\frac{3}{2}$

解法一　将原不等式化为一般形式 $2x^2-x-3<0$.

左边因式分解，得 $(2x-3)(x+1)<0$，

可化为两个不等式组 $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1<0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x-3<0 \\ x+1>0 \end{cases}$.

分别解不等式组，得 $\begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x<-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x<\dfrac{3}{2} \\ x>-1 \end{cases}$，

∴ 无解 或 $-1<x<\frac{3}{2}$.

∴ 原不等式的解为 $-1<x<\frac{2}{3}$.

解法二 由原不等式，得 $2x^2-x-3<0$，

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-3)>0$，

方程 $2x^2-x-3=0$ 有两个实数根为 $x_1=-1$，$x_2=\frac{3}{2}$.

画出草图，$a=2>0$，抛物线开口向上，得原不等式的解为 $-1<x<\frac{3}{2}$.

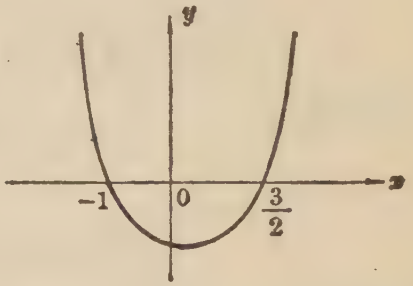


图 27-1

例 2 解不等式 $(4-x)(x+1)<8$.

解 整理，得 $x^2-3x+4>0$，

∵ $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times4<0$，

∴ $x^2-3x+4=0$ 无实根.

即抛物线 $y=x^2-3x+4$ 与 x 轴无交点且开口向上.

∴ 不等式 $x^2-3x+4>0$ 的解集为一切实数.

由例 1、例 2 可知，一元二次不等式有两种解法，解法一是因式分解法，解法二是利用二次函数图象来讨论一元二次不等式的解集. 步骤为：

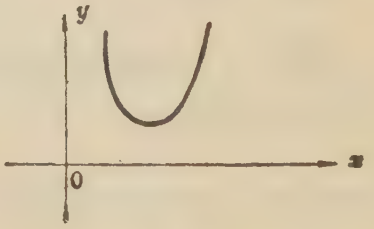


图 27-2

① 把二次项系数化为正数，确保抛物线开口向上；

② 判断 b^2-4ac 的符号，若 $b^2-4ac\geqslant0$，求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个实根；

③ 根据抛物线的开口方向及其与 x 轴的交点个数(由 b^2

$-4ac$ 的符号而定，若 $b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c>0$ 无实根，此时图象与 x 轴无交点）．根据交点位置，画出草图；

④ 由草图可直接得出不等式的解集．函数值大于零时，不等式的解集在数轴上的位置是在函数的两个零值点的两边；函数值小于零时，不等式的解集在数轴上的位置是在函数的两个零值点的中间．

例 3 解分式不等式 $\dfrac{x+5}{x-6}<0$．

解法一 ∵ $\dfrac{x+5}{x-6}<0$，∴ $x+5$ 和 $x-6$ 符号相反，

∴ $\begin{cases}x+5>0\\x-6<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+5<0\\x-6>0\end{cases}$．

∴ $-5<x<6$ 或空集．

∴ 原不等式的解集是 $-5<x<6$．

解法二 不等式可化为 $(x+5)(x-6)<0$．

∵ $(x+5)(x-6)=0$ 的两根为 $x_1=-5$，$x_2=6$，

∴ 原不等式的解集为 $-5<x<6$．

由例 3 可知，解分式不等式有两种方法，方法一利用“同号相除得正，异号相除得负”，把它化为解两个不等式组；方法二利用两个数的商 $\dfrac{a}{b}$ 若为正（或负），则它们的积 a、b 也必为正（或负），可以把分式不等式转化为解一元二次不等式．

例 4 解不等式 $\dfrac{4}{x-1}>x-1$

解 原不等式为 $\dfrac{4}{x-1}-(x-1)>0$．

整理，得 $\dfrac{x^2-2x-3}{x-1}<0$．

不等式可化为$\begin{cases}x^2-2x-3<0 & ① \\ x-1>0 & ②\end{cases}$或$\begin{cases}x^2-2x-3>0 & ③ \\ x-1<0 & ④\end{cases}$

由不等式①得$-1<x<3$，由不等式③得$x<-1$或$x>3$，

由不等式②得$x>1$，　　由不等式④得$x<1$，

∴ $1<x<3$ 或 $x<-1$.

∴ 原不等式解集为 $1<x<3$ 或 $x<-1$.

由例 4 可知，如果所解分式不等式一边不是零时，应该移项、通分，整理成左边是一个分式，右边是零的形式．由于分母的符号是不确定的，所以不能象解分式方程那样“去分母”.

例 5 已知方程 $(m-8)x^2-2(m-4)x-(2+m)=0$ ① 没有实数根，而方程 $(m+2)x^2+2(m-4)x+(4-m)=0$ ② 有两个实数根，求 m 的取值范围.

解 由题意得方程①、②的 Δ 值分别如下：

$$\begin{cases}\Delta_1=[-2(m-4)]^2-4(m-8)[-(2+m)]<0 \\ \Delta_2=[2(m-4)]^2-4(m+2)(4-m)\geqslant 0\end{cases}$$

化简为$\begin{cases}8m^2-56m<0 \\ m^2-5m+4\geqslant 0\end{cases}$，即$\begin{cases}0<m<7 \\ m\leqslant 1 \text{ 或 } m\geqslant 4\end{cases}$.

∴ 不等式组的解集为 $0<m\leqslant 1$ 或 $4\leqslant m<7$.

∴ m 的取值范围是 $0<m\leqslant 1$ 或 $4\leqslant m<7$.

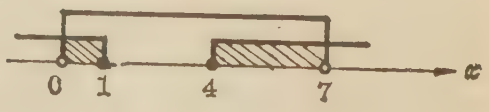


图 27-3

练习二十七

1. 选择题：

(1) $x^2>64$ 的解集是(　　).

A $x>8$　B $x>\pm 8$　C $x>8$ 或 $x<-8$　D $-8<x<8$

(2) $x^2<5x$ 的解集是(　　).

A $x<5$　　B $x>-5$　　C $-5<x<5$　　D $0<x<5$

(3) 要使不等式 $a^2+b^2>2ab$ 成立，必须(　　).

A $a>0$，$b>0$　　B $a\leqslant 0$，$b<0$

C a、b 中至少有一个是 0　D a、b 是任意实数

(4) 不等式组 $\begin{cases} m^2+m-6\leqslant 0 \\ m^2-1>0 \end{cases}$ 的解集是(　　).

A $-1<m\leqslant 2$　　B $m<-3$ 或 $m\geqslant 2$

C $-3\leqslant m<-1$ 或 $1<m\leqslant 2$

D $-3<m<-1$ 或 $1<m<2$

2. 解下列不等式：

(1) $2x^2-x-3<0$；　　(2) $\dfrac{2x+4}{x-3}\geqslant 0$；

(3) $\dfrac{x^2}{x-1}\geqslant 0$；　　(4) $6+5x-6x^2\geqslant 0$(整数解)；

(5) $x(2x-1)>(x+1)^2$；(6) $\dfrac{2x+1}{x-2}\geqslant -1$.

3. 下列各题的解法有何不同？

(1) 计算：$\dfrac{x+3}{x+1}-2$；

(2) 解方程：$\dfrac{x+3}{x+1}=2$；

(3) 解不等式：$\dfrac{x+3}{x+1}>2$.

五、指数与常用对数

本单元分 8 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表 4.

第28天　指数概念的推广，有理指数幂的概念

复习要求：

1．理解零指数、负整数指数、分数指数幂的概念；

2．掌握科学记数法，理解 n 次根式的有关概念和性质；

3．掌握分数指数式与根式的互化，并能结合分数指数进行根式的化简和运算．

例 1　当 x 取何值时，下列各式在实数范围内有意义．

(1) $\dfrac{1}{(x^2-2)^0-5}$；(2) $x^{\frac{1}{2}}+(-x)^{\frac{1}{2}}$；

(3) $(x+5)^{-\frac{1}{2}}$；(4) $(x^5+2)^{-\frac{1}{3}}$；(5) $(x+3)^{-2}$．

解　(1) $\because x^2-2\neq 0$，$\therefore x\neq \pm\sqrt{2}$．

(2) $\because x^{\frac{1}{2}}$，$\therefore x\geqslant 0$．又 $\because (-x)^{\frac{1}{2}}$，$\therefore x\leqslant 0$，$\therefore x=0$．

(3) $\because x+5>0$，$\therefore x>-5$．

(4) $\because x^5+2\neq 0$，$\therefore x\neq -\sqrt[5]{2}$．

(5) $\because x+3\neq 0$，$\therefore x\neq -3$．

上例中第 (2)～(5) 小题求解时，可由定义直接求得，也可以把负整数指数幂、分数指数幂分别化成分式与根式，使问题转化成求分式、根式中字母的取值范围．

例 2　计算：(1) $(x-2)^0$；(2) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{8}}$；

(3) $100^{-\frac{3}{2}}$；(4) $54^{\frac{1}{3}}$．

解　(1) $(x-2)^0=\begin{cases}1 & (x\neq 2)\\ \text{无意义} & (x=2)\end{cases}$．

(2) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{8}}$ 无意义.

(3) $100^{-\frac{3}{2}}=(10^2)^{-\frac{3}{2}}=10^{-3}=0.001$.

(4) $54^{\frac{1}{3}}=(3^3\cdot 2)^{\frac{1}{3}}=3\cdot 2^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{2}$.

例 3 利用分数指数计算下列各式，并把结果化为不含有负数指数和分数指数的式子.

(1) $2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$；(2) $\sqrt{x^3\cdot x\sqrt{x}\cdot x^6\cdot\sqrt[3]{x}}$；

(3) $\dfrac{(\sqrt[3]{a^2b})^2\sqrt{a}}{b\sqrt[4]{ab^3}}$.

解 (1) 原式 $=2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{7}{4}}=2\sqrt[4]{2^3}$.

(2) 原式 $=(x^3\cdot x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^6\cdot x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(x^{3+1+\frac{1}{2}+6+\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=x^{\frac{65}{12}}=x^5\sqrt[12]{x^5}$.

(3) 原式 $=\dfrac{[(a^2b)^{\frac{1}{3}}]^2\cdot a^{\frac{1}{2}}}{b(ab^3)^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}}}{b\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{\frac{3}{4}}}$

$=a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{3}-1-\frac{3}{4}}=a^{\frac{19}{12}}b^{-\frac{13}{12}}=\dfrac{a}{b}\sqrt[12]{\dfrac{a^7}{b}}=\dfrac{a}{b^2}\sqrt[12]{a^7b^{11}}$.

由上例可看出，根式的乘法、除法、乘方、开方，除特殊情况外，一般利用分数指数进行计算比较简便. 但是，涉及负数开方和根式加减的问题，有的不能利用分数指数，有的利用分数指数也并不方便. 因此，根式运算也不宜于完全用分数指数幂的运算来代替.

练习二十八

1. 判断题：(题中 a、b 都不为零)

(1) $(a^0)^n=a$；(　　)　　(2) $(a^{-n})^0=1$；(　　)

(3) $(a^0)^0=1$；(　　)

(4) $a^0+b^0=(a+b)^0=1$；(　　)

(5) $(a-b)^0=1$；(　　)

(6) $(2a+2^{-1})^{-2}=\frac{1}{4a^2}+4$．(　　)

2．填充题：

(1) $(-5)^0=$_____，$(x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{3}})^6=$_____．

(2) $(ab^2)^3\cdot a^5=$_____．

(3) 用科学记数法表示 $-0.0000068345\times10^2=$_____．

(4) 若 $a^{3n}=2$，则 $a^{15n}=$_____．

(5) $-(0.027)^{-\frac{1}{3}}=$_____．

(6) $(16\times81)^{-0.25}=$_____．

(7) 用分数指数幂把下面分式化成不含分母的式子：

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=$_____$(a>0)$．

(8) 当 x 取_____时，$(x-3)^0$ 有意义．

(9) 当 a 取_____时，$(a^2)^{-3}$ 有意义．

(10) $\left(3^{-1}-\frac{1}{3}\right)^{-3}=$_____．

3．选择题：

(1) 下列计算正确的是(　　)．

A $(-1)^0=-1$　　B $(-1)^{-1}=1$

C $3a^{-2}=\frac{1}{3a^2}$　　D $(-x)^5\div(-x)^3=x^2$

(2) 把根式 $-2\sqrt[5]{(a-b)^{-2}}$ 改写为分数指数幂的形式为(　　)．

A $-2(a-b)^{-\frac{2}{5}}$　　B $2(a^{\frac{2}{5}}-b^{\frac{2}{5}})$

C $-2(a^{-\frac{2}{5}}-b^{-\frac{2}{5}})$　D $-2(a-b)^{-\frac{5}{2}}$

(3) 若将 $(2a+b)^{\frac{1}{a+3b}}$ 与 $(10-a)^{\frac{1}{b+5}}$ 化为根式后是同类根式，则 a、b 各等于(　　).

A 5, −5　　B 3, 1　　C $\frac{35}{11}$, $\frac{5}{11}$　　D 无实数解

(4) 若 a、x、y、z 都不为零，单项式 $ax^{3m}y^4$ 与 $3x^{m+1}y^{n-1}z^p$ 是同类项，且和为零，则 a、m、n、p 的值为(　　).

A $-3, 3, 5, 1$　B $3, \frac{1}{2}, 5, 0$　C $-3, \frac{1}{2}, 5, 0$

D 以上都不是

4. 判断下列根式中最简根式的个数.

$\sqrt[7]{a^3b^3}$, $\sqrt[6]{\frac{1}{x^3}}$, $\sqrt[4]{4x^2}$, $\sqrt[3]{\frac{6}{x^3}}$,

$y\cdot\sqrt[4]{x^2}$, $9^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{32}$, $x\cdot\sqrt[4]{x^6-y^2}$.

5. 计算：

(1) $(-2)^0(0.01)^{-\frac{1}{2}}$　(2) $[4^{0.5}-(-0.5)^{-2}]+(-9)^0$

(3) $(\sqrt[3]{\sqrt[6]{a^4}})^4(\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^9}})^4$

(4) $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}}}$

(5) $\left(\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{m^2}}{4m}}\right)^3$

(6) $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}}\div\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[6]{b^5}}$

6. (1) 已知 $a^{2x}=3$，求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$；

(2) 已知 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，求

$[a^{-\frac{1}{2}}b(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^{-1}b^{0})^{-\frac{2}{3}}]^{2}$ 的值.

7. 已知 $a\neq 1$，且 $m=a^{x}$，$n=a^{y}$，$m^{y}\cdot n^{x}=a^{\frac{2}{z}}$.

求证：$xyz=1$.

第 29 天　有理指数幂的运算法则

复习要求：

1. 了解正整数指数幂的运算法则可以推广到有理数指数幂；

2. 能熟练正确地进行各种指数运算.

例 1　计算：$\left[\sqrt[3]{x^{2}}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{5}}\right]^{\frac{4}{13}}\div\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{x}$.

解　原式 $=[x^{\frac{2}{3}}\cdot(x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}})^{\frac{5}{2}}]^{\frac{4}{13}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}$

$=(x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{5}{12}})^{\frac{4}{13}}\cdot x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}}=(x^{\frac{13}{12}})^{\frac{4}{13}}\cdot x^{-\frac{5}{6}}=x^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$.

由例 1 可知，在运算中，必须注意运算顺序，在含有乘除的几个连续运算中，应按照从左到右的次序进行演算.

例 2　计算：$\frac{a+b^{-1}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a-b^{-1}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}$

解　原式 $=\frac{(a^{\frac{1}{3}})^{3}+(b^{-\frac{1}{3}})^{3}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{3}}}-\frac{(a^{\frac{1}{3}})^{3}-(b^{-\frac{1}{3}})^{3}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}$

$$=a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{2}{3}}$$

$$=-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}.$$

由例 2 可知，在分数指数幂的运算中，要正确熟练地运用幂的运算法则，对有些题目要灵活运用乘法公式.

例 3 计算：$2^{3^2}+(2^3)^3-2^{-2}-2^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}-2^{-\frac{1}{2}}-2^0+3\times 2^{-\frac{1}{2}}+(-2^2)^3-\frac{1}{2}\times 2^{2^3}$.

解 原式 $=2^9+8^2-\frac{1}{4}-\sqrt{2}+\frac{1}{4}+(-2^{-1})^{-2}-\frac{1}{\sqrt{2}}-1+\frac{3}{\sqrt{2}}-64-\frac{1}{2}\times 2^8=512+64-\sqrt{2}+4-\frac{\sqrt{2}}{2}-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}-64-128=515-128=387.$

由此例得指数幂的运算步骤是：

① 有括号，先做括号；

② 无括号，如 2^{3^2}，则先做指数，即 $2^9=512$；

③ 负指数幂化为正指数幂的倒数，如 $2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

④ 底数是负数，先确定符号，如 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$；

⑤ 底数是分数可先化为整数的负指数幂如 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=(2^{-1})^{-2}=2^2=4$.

例 4 已知 $x=\frac{1}{2}(5^{\frac{1}{n}}-5^{-\frac{1}{n}})$（其中 n 为正整数），求 $(x+\sqrt{1+x^2})^n$ 的值.

解 设 $5^{\frac{1}{n}}=a$，则 $5^{-\frac{1}{n}}=a^{-1}$.

$\therefore\ x=\frac{1}{2}(a-a^{-1})$,

$x^2=\frac{1}{4}(a^2+a^{-2}-2)$.

$\therefore\ (x+\sqrt{1+x^2})^n=\left[\frac{1}{2}(a-a^{-1})+\sqrt{1+\frac{1}{4}(a^2+a^{-2}-2)}\right]^n$

$=\left[\frac{1}{2}(a-a^{-1})+\sqrt{\frac{1}{4}(a+a^{-1})^2}\right]^n$

$=a^n=5$.

例 5 解指数方程 $2^{2x-3}-3\cdot 2^{x-2}+1=0$.

解 $2^{2(x-2)+1}-3\cdot 2^{x-2}+1=0$,

$2\cdot 2^{2(x-2)}-3\cdot 2^{x-2}+1=0$.

设 $2^{x-2}=a$，则原方程为 $2a^2-3a+1=0$.

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$ 或 $a=1$.

即 $2^{x-2}=\frac{1}{2}$ 或 $2^{x-2}=1$.

$\therefore\ x=1$ 或 $x=2$.

练 习 二 十 九

1. 填充：

(1) $2^{-2}\times(-2)^2-4\div(\sqrt{5}-1)^0-\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-1}=$ _____.

(2) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{a}\,b^{-\frac{1}{2}}c\right)\left(-\frac{3}{5}a^{-1}b^{-\frac{1}{3}}\sqrt{c}\right)\div 3^{-1}\sqrt[6]{ab^5c^{-1}}$

$=$ _____.

(3) $(3a^{\frac{1}{2}}+1-2a^{-\frac{1}{2}})(3a^{\frac{1}{2}}-1-2a^{-\frac{1}{2}})=$_____.

(4) $\dfrac{m-n}{m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{m^{\frac{3}{4}}+n^{\frac{3}{4}}}{m^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{4}}}=$_____.

2. 选择题:

(1) 下列各式中,正确的是(　　).

A $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}=a$　　B $(a^{-\frac{1}{2}})^2=a$

C $(a+b)^{-1}=a^{-1}+b^{-1}$　　D $(a^2)^3=(a^3)^2$

(2) $\sqrt{a^{-3}b\left(\dfrac{1}{a^3}\right)^{-1}}\div(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$的值为(　　).

A $\dfrac{a\sqrt[3]{ab}-a^{-3}b}{a-b}$　　B $\dfrac{\sqrt{ab}-b}{a-b}$

C $\dfrac{a^{-3}\cdot\sqrt{ab}-a^{-3}b}{a-b}$　　D 以上都不是

(3) 若 $10^{2x}=25$,则 10^{-x} 等于(　　).

A $-\dfrac{1}{5}$　　B $\dfrac{1}{5}$　　C $\dfrac{1}{50}$　　D $\dfrac{1}{625}$

3. 利用换元法计算下列各题:

(1) $\left[\dfrac{(a+\sqrt[3]{a^2b})\div(b+\sqrt[3]{ab^2})-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{b}}\right]^{-6}$;

(提示:设 $A=a^{\frac{1}{3}}$, $B=b^{\frac{1}{3}}$)

(2) $\left[a(1-a)^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{a^2}{(1-a)^{\frac{5}{3}}}\right]\div[\sqrt[3]{1-a}\cdot(1-2a+a^2)^{-1}]$. (提示:设 $1-a=A$, 则 $a=1-A$)

4. 化简 $(x^{\frac{a}{a-b}})^{\frac{1}{c-a}}\cdot(x^{\frac{b}{b-c}})^{\frac{1}{a-b}}\cdot(x^{\frac{c}{c-a}})^{\frac{1}{b-c}}$.

5. 设 $x=(3-2\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}$，求 $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}$ 的值.

6. 设 $2x^2-5xy+2y^2=0$，求 $8^{-\frac{y^2}{x^2+xy}}$ 的值.

7. 设 α、β 是方程 $2x^2+3x+1=0$ 的两个根，求 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha+\beta}$ 的值.

8. 解方程 $2^{2x+8}+1=32(2^x)$.

9. 解方程组 $\begin{cases}2x^{-1}+3y^{-1}=8\\3x^{-1}-2y^{-1}=-1\end{cases}$.

第30天　对数的定义、性质、运算法则

复习要求：

1. 掌握对数的基本概念：(1)定义，(2)对数与指数的关系，(3)恒等式；

2. 掌握对数的性质；

3. 熟练地应用对数的四条运算法则进行计算.

例1　下列各式在什么条件下成立.

(1) $\log_5(-x)$；(2) $\log_7(1-x)$；(3) $\dfrac{1}{\log_2(x-1)}$；

(4) $\sqrt{\log_3 x}$；(5) $\log_2\log_3\log_4 x$.

解　(1) $\because -x>0$，$\therefore x<0$.

(2) $\because 1-x>0$，$\therefore x<1$.

(3) $\because x-1>0$，且 $x-1\neq 1$，$\therefore x>1$ 且 $x\neq 2$.

(4) $\because \log_3 x \geqslant 0$，$\therefore x \geqslant 1$.

(5) $\begin{cases} x>0 \\ \log_4 x>0 \\ \log_3 \log_4 x>0 \end{cases} \Longrightarrow \log_4 x>1 \Longrightarrow x>4$.

从上例可看出，求一个对数式成立的条件，一般都是根据对数的定义来解决的，所以在对数式 $\log_a N=b$ 中，应抓住 $a>0$，$a\neq 1$，$N>0$ 三个条件.

例 2 求下列各式中的 x.

(1) $(\log_3 x)^2=9$；(2) $\log_x(\sqrt{3}+1)=-1$；

(3) $\log_4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=x$.

解 (1) $\because \log_3 x=\pm 3$，

$\therefore x_1=3^3=27$，$x_2=3^{-3}=\frac{1}{27}$.

(2) $\because x^{-1}=\sqrt{3}+1$，$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

(3) $\because 4^x=2^{-\frac{2}{3}}$，$2^{2x}=2^{-\frac{2}{3}}$，

$\therefore 2x=-\frac{2}{3}$，$\therefore x=-\frac{1}{3}$.

由例 2 可以看出，在 $\log_a N=b$ 中，知道了 a、b、N 这三个数中的任意两个数，就可以求第三个数，但关键是要把对数式转化成指数式. 如果已知 a、b，就可以用乘方运算求 N；如果已知 N、b，就可以用开方运算求 a；如果已知 a、N，就要化成同底的幂，通过比较它们的指数求 b.

例 3 不查表计算：

(1) $2^{\log_2(\log_2 8)}$；(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1-\log_5\frac{5}{\sqrt[3]{25}}}$；

(3) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$；(4) $\log_{\sqrt{3}}3\sqrt{3}$；

(5) $3\log_{14}1+\log_2{}^{27}\log_32$；

(6) $\log_35+\sqrt{(\log_35)^2-4\log_35+4}$.

解 (1) 原式 $=2^{\log_2(\log_22^3)}=2^{\log_23}=3$.

(2) 原式 $=\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^{-\log_5\frac{5}{\sqrt[3]{25}}}=\frac{1}{5}\times 5^{\log_5\frac{5}{\sqrt[3]{25}}}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{\sqrt[3]{25}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$.

(3) 原式 $=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$

$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(4-2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})})$

$=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}2=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}$.

(4) 解法一：设 $\log_{\sqrt{3}}3\sqrt{3}=x$，则 $\sqrt{3}^x=3\sqrt{3}$，

即 $\sqrt{3}^x=(\sqrt{3})^3$，$\therefore\ x=3$.

解法二：$\log_{\sqrt{3}}3\sqrt{3}=\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^3=3$.

(5) 原式 $=0+\log_23^3\log_32=3\log_23\log_32=3$.

(6) 原式 $=\log_35+|\log_35-2|=\log_35+2-\log_35=2$.

由例3(6)可看出被开方式为对数式的时候，同样要注意到算术根的问题.

由例3可看出解有关对数的不查表的计算题常要用到下列对数恒等式 ① $a^{\log_aN}=N$ ② $\log_aa=1$，③ $\log_a1=0$，④ $\log_ab=\frac{1}{\log_ba}$.所以首先要把所给的对数式相应地转化成形如以上的恒等式，然后再计算.

练 习 三 十

1. 填充：

(1) $\log_{3+2\sqrt{2}} x=\frac{1}{2}$，$x=$_____.

(2) $\log_7(x^2-1)=0$，$x=$_____.

(3) $\log_{1-x}(x+1)^2=1$，$x=$_____.

(4) $2^{\log_4 5}=$_____；$5^{\log_{\frac{1}{5}}4}=$_____；

$7^{\log_7^2-1}=$_____；$\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=$_____.

2. 选择题：

(1) 指数式 $b^2=a$ ($b\neq 1$，$b>0$)，所对应的对数式是(　　).

A $\log_2 a=b$　B $\log_2 b=a$　C $\log_a b=2$　D $\log_b a=2$

(2) a 为正数时，$\log_a a$ 的值为(　　).

A 1　　B a　　C 0　　D 不能确定

(3) 下列各题求 x 的过程中，求幂的是(　　)，求对数的是(　　)，求方根的是(　　).

A $3^4=x$　　B $x^3=1000$　　C $10^x=0.0001$

D $x^{\frac{1}{2}}=5$　　E $\log_3 x=3$

(4) 已知 $\log_{16}x=k$，则 $\log_2\sqrt{x}$ 的值等于(　　).

A $4k$　　B $2k$　　C $\frac{k}{2}$　　D $\frac{k}{4}$

3. 下列各式在什么条件下成立？

(1) $\log_a b=1$；(2) $\log_c d=0$；(3) $\log_a(-mn)=\log_a m+\log_a(-n)$；(4) $\log_x(-x)^2=2$；

(5) $\log_{2x-3}(3x-5)$；(6) $(\lg x)^{-1}$.

4. 不查表计算：

(1) $16^{\log_4 3+1}$；(2) $4^{-\frac{\log_3 9}{2}}$；(3) $\log_{\sqrt{2}+1}(3+2\sqrt{2})$；

(4) $\frac{\log_2(\log_2 16)^3}{\log_2(\log_2 16)}$；(5) $2^{\frac{1}{5\log_{0.4}4}}$；(6) $81^{0.5\log_9 7}$.

5．已知 $\log_{2-3x}(x^2+5x-7)=1$，求 x.

6．试证：(1) $\log_{a^k}b=\frac{\log_a b}{k}$；(2) $\log_{a^n}b^n=\log_a b$.

第31天　对数的运算

复习要求：

1．能熟练地运用对数的四条运算法则进行对数式的运算；

2．了解并应用对数的换底公式.

例1　已知 $y=\frac{(a-b)^3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2d^3}}$，求 $\log_c y$.

解　$\log_c y=\log_c\frac{(a-b)^3\sqrt[3]{c}}{\sqrt[5]{(a+b)^2d^3}}$

$=\log_c(a-b)^3\cdot\sqrt[3]{c}-\log_c\sqrt[5]{(a+b)^2d^3}$

$=3\log_c(a-b)+\frac{1}{3}\log_c c-\frac{1}{5}[2\log_c(a+b)+3\log_c d]$

$=3\log_c(a-b)+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\log_c(a+b)-\frac{3}{5}\log_c d$.

由此例可看出，求任何单项式的对数就是求该式中各因式的对数的代数和.

例2　已知 $\log_2 x=\log_2 a+2\log_2 b-\frac{1}{3}\log_2 c$，求 x.

解　$\log_2 x=\log_2 a+\log_2 b^2-\log_2 c^{\frac{1}{3}}$

$\log_2 x=\log_2 ab^2-\log_2 c^{\frac{1}{3}}$

$\log_2 x=\log_2\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}$.

∵ 同底的两个对数相等，则它的真数相等.

$$\therefore\ x=\frac{ab^2}{\sqrt[3]{c}}=\frac{ab^2}{c}\sqrt[3]{c^2}.$$

由此例可看出，由一个单项式的对数式反求这个单项式，也是求一个单项式的值的一种方法.

例 3 已知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，求 $\log_{10}0.2$，$\log_{10}\sqrt{1.5}$.

解 $\log_{10}0.2=\log_{10}\frac{2}{10}=\log_{10}2-\log_{10}10=0.3010-1$

$$=-0.6990.$$

$$\log_{10}\sqrt{1.5}=\frac{1}{2}\log_{10}\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(\log_{10}3-\log_{10}2)$$

$$=\frac{1}{2}(0.4771-0.3010)=\frac{1}{2}\times 0.1761=0.08805.$$

例 4 已知 $\log_{10}2=a$，$\log_{10}7=b$，求 $\log_8 9.8$.

解 $$\log_8 9.8=\frac{\log_{10}9.8}{\log_{10}8}=\frac{\log_{10}\frac{2\times 7^2}{10}}{\log_{10}2^3}$$

$$=\frac{\log_{10}2+2\log_{10}7-\log_{10}10}{3\log_{10}2}=\frac{a+2b-1}{3a}.$$

由例 3、4 可知，已知某些数的常用对数，求其他数的常用对数时，先要将所求对数的真数转化成已知对数的真数的形式，然后再计算出所求对数的值.

例 5 求 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$ 的值(其中 a、b、c 是不等于 1 的正数).

解 $$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=\frac{\log_{10}b}{\log_{10}a}\cdot\frac{\log_{10}c}{\log_{10}b}\cdot\frac{\log_{10}a}{\log_{10}c}=1.$$

由此例可以看出，不同底的对数进行运算一般都利用换底公式化成同底的对数进行运算.

练习三十一

1. 选择题：

(1) $\log_8 4+1=$(　　).

A $\log_8 12$　B $\log_8 2$　C $\log_8\frac{1}{2}$　D $\log_8 32$

(2) $\frac{1}{2}\log_6 12-\log_6\sqrt{2}=$(　　).

A $6\sqrt{2}$　　B $12\sqrt{2}$　　C $\frac{1}{2}$　D 3

(3) 已知 $\log_7 3=a$，$\log_7 4=b$，则 $\log_7 378=$(　　).

A $\frac{3}{2}ab$　　B $3a-\frac{b}{2}+1$　　C $3a+\frac{b}{2}+1$

D 以上答案都不对

2. 已知 $x=\sqrt{\frac{\sqrt{ab^{-1}}}{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}b}}$ $(a>0,b>0)$，求 $\log_5 x$.

3. 已知 $\log_2 x=-\log_2(a+2b)+\frac{2}{3}\left[2\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 2b-\frac{1}{3}(\log_2 a+\log_2 b)\right]$，求 x.

4. 已知 $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，求

(1) $\log_{10}450$，　(2) $\log_{10}\frac{1}{750}$，

(3) $\log_2 13+\frac{1}{2}\log_2 25+\log_2\frac{4}{7}-\log_2\frac{13}{35}$.

5. 已知 $\log_a N=\log_a c+b$，求 N.

6. 计算：

(1) $\log_2 8-\log_3 27$

(2) $\left(3\log_{\sqrt{27}}\sqrt{27}-\log_{\sqrt{72}}\frac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{8}}{2\cdot\sqrt[6]{72}}+\log_2 4^{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

(3) $\log_5 10 - \log_5 \frac{2}{\sqrt{5}}$

(4) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

7. (1) 已知 $\log_{12} 27 = a$，求证：$\log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a}$.

(2) 已知 $a^2 + b^2 = 6ab (a>0, b>0)$，求证：$\log_{10} \frac{a-b}{2}$

$= \frac{1}{2}(\log_{10} a + \log_{10} b)$.

8. 已知 a、b、c 是实数，且满足下列等式 $\sqrt{2a-1} + |b-4| + (c-8)^2 = 0$，求 $\log_{abc} 2$ 的值.

9. 已知 $\log_3 12 = a$，试用 a 表示 $\log_3 24$.

第 32 天　练习三十二

1. 填充：

(1) $4^{-\frac{1}{2}}$ 的相反数是_____，倒数是_____，绝对值是_____.

(2) $\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^0 = 1$，则 x 的取值范围为_____，y 的取值范围为_____.

(3) 已知 $\log_x x^x = 2$，则 $x =$ _____.

(4) $x =$ _____ 时，$\log_5 \frac{1-3x}{2}$ 的值等于零；

$x =$ _____ 时，$\log_5 \frac{1-3x}{2}$ 的值等于 1；

$x =$ _____ 时，$\log_5 \frac{1-3x}{2}$ 的值等于 2.

(5) $\log_8\log_{\frac{1}{4}}\lg x$，$x$ 的取值范围为_____。

2. 选择题：

(1) 满足方程 $2^{2x^2-7x+5}=1$ 的 x 的值的个数有(　　)。

A 0　　B 1　　C 2　　D 4

(2) 当 $a>0$，且 $x\neq 0$ 时，$\sqrt{-ax^3}=$(　　)。

A $x\sqrt{ax}$　　B $x\sqrt{-ax}$　　C $-x\sqrt{ax}$　　D $-x\sqrt{-ax}$

(3) 如果 $(\sqrt{a^2}+a)^0=1$ 时，则 a 的取值范围是(　　)。

A $a>0$　　B $a\geqslant 0$　　C $a\neq 0$　　D a 为一切实数

(4) 已知 $\log_7[\log_3(\log_2 x)]=0$，那么 $x^{-\frac{1}{2}}=$(　　)。

A $\frac{1}{3}$　　B $\frac{1}{2\sqrt{3}}$　　C $\frac{1}{2\sqrt{2}}$　　D $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

(5) $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=\log_3[\log_4(\log_2 y)]=\log_4[\log_2(\log_3 z)]=0$，那么 $x+y+z=$(　　)。

A 50　　B 58　　C 89　　D 111

(6) 若 $a=bc^{\frac{x}{m}}$，用含 a、b、c 和 m 的代数式表示 x 为(　　)。

A $\frac{a^m c}{b^m}$　　B $m\log_c\frac{a}{b}$　　C $\frac{m}{b}\log_c a$　　D $\log_c\left(\frac{a^m}{b}\right)$

(7) 已知 $\log_m\sqrt[n]{p}=q$，下式成立的是(　　)。

A $m^{nq}=p$　　B $q^{mn}=p$　　C $m^q=p^n$　　D $m^{n+q}=p$

3. 已知 $2(\log_a b)^2-13\log_a b+6=0$，且 $a>b>1$，求 $\frac{a+b^4}{a^2+b^2}$ 的值。

4. 设 x、y 为实数，且 $\left(\frac{2}{3}x-6\right)^2+\left(\frac{1}{2}y-8\right)^2=0$，求 $\log_{\frac{y}{2}}x\cdot\log_x y$。

5. 已知 $\log_2 3=a$，$\log_2 5=b$，求 $\log_2 60$，$\log_2 150$。

6. 已知 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a$，求 $x+x^{-1}$ 和 $x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}$ 的值。

7. 计算：

(1) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\left\{\frac{1}{4}[0.027^{\frac{2}{3}}+15\times 0.0016^{0.75}+(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}\div 4]\right\}^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\sqrt{ab}\right)\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)$

(4) $\left(4x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{xy^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x^{-1}y^2}}\right)^{-3}$

(5) $\sqrt[3]{(a+1)^4}\cdot\sqrt[3]{1+2a+a^2}-a^2$

(6) $\log_2 1+\log_3 3+\log_{10}\sqrt[4]{1000}$

(7) $\log_2\frac{4}{3}+\log_2\frac{3}{2}$

8. 设关于 x 的二次方程 $2x^2+(\log_2 m)x+\log_2\sqrt{m}=0$ 有两个相等的实数根，求 m。

9. 化简 $\log_a\left[\left(\frac{a^2c^{-3}}{a^{-2}b^{-3}}\right)^{-2}\div\left(\frac{a^{-3}c^{-2}}{a^3b^{-2}}\right)^{-3}\right]$.

10. 设 $\frac{x(y+z-x)}{\log_a x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_a y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_a z}$. 证明：$y^zz^y=z^xx^z=y^xx^y$.

第 33 天　常用对数

复习要求：

1. 理解常用对数的有关概念和基本性质；

2. 掌握确定常用对数的首数和尾数的方法；

3．熟练地利用常用对数进行运算．

例 1 不查表求 $\dfrac{\lg 3+\frac{2}{5}\lg 9+\frac{3}{5}\lg\sqrt{27}-\lg\sqrt{3}}{\lg 81-\lg 27}$ 的值．

解法一 原式 $=\dfrac{\lg 3+\frac{4}{5}\lg 3+\frac{9}{10}\lg 3-\frac{1}{2}\lg 3}{4\lg 3-3\lg 3}$

$$=\frac{\frac{11}{5}\lg 3}{\lg 3}=\frac{11}{5}.$$

解法二 原式 $=\dfrac{\lg 3+\lg 3^{\frac{4}{5}}+\lg 3^{\frac{9}{10}}-\lg 3^{\frac{1}{2}}}{\lg\frac{81}{27}}$

$$=\frac{\lg 3^{\frac{11}{5}}}{\lg 3}=\frac{11}{5}.$$

由例 1 可知这类问题有两种解法：一种解法是正用对数运算法则，化成对数的和、差、积、商的形式进行化简；另一种解法是反用对数运算法则，化成真数的积、商、幂、方根的形式进行化简．

例 2 不查表，计算：$\lg 25+\frac{2}{3}\lg 8+\lg 5\lg 20+(\lg 2)^2$．

解法一 原式 $=2\lg 5+2\lg 2+\lg 5(1+\lg 2)+(\lg 2)^2$

$=2(\lg 5+\lg 2)+\lg 5+\lg 5\lg 2+(\lg 2)^2$

$=2+\lg 5+\lg 2(\lg 5+\lg 2)$

$=2+\lg 5+\lg 2=3$．

解法二 原式 $=2\lg 5+2\lg 2+2\lg 2\lg 5+\lg^2 5+\lg^2 2$

$=2+(\lg 5+\lg 2)^2=3$．

由例 2 可以看出，在遇到含有 lg2 和 lg5 的对数进行计

算时要注意应用 $\lg2+\lg5=1$，同时在变换真数时，要有意识地使之同时出现 2 和 5．

例 3 已知 $\lg x$ 的首数与 $\lg\sqrt{1015.7}$ 的首数相同，尾数与 $\lg\frac{31}{40}$ 的尾数相同，不查表求 x．

解 ∵ $10^1<\sqrt{1015.7}<10^2$，∴ $\lg\sqrt{1015.7}$ 的首数为 1，从而 $\lg x$ 的首数也为 1．

∵ $\frac{31}{40}=0.775$，而 $\lg x$ 与 $\lg0.775$ 的尾数相同，

∴ x 与 0.775 只有小数点位置不同，

∴ $x=77.5$．

例 4 已知 $\lg200=2.3010$，$\lg3000=3.4771$

(1) 问 $2^{100}\times3^{1000}$ 是几位数？

(2) 问 $0.2^{100}\times0.3^{1000}$ 的小数点后面连续有几个零？

解 (1) ∵ $\lg(2^{100}\times3^{1000})=100\lg2+1000\lg3=100\times0.3010+1000\times0.4771=507.2$，

∴ $2^{100}\times3^{1000}$ 是 508 位数．

(2) ∵ $\lg(0.2^{100}\times0.3^{1000})=100\lg0.2+1000\lg0.3=100\times\overline{1}.3010+1000\times\overline{1}.4771=-100+30.1+(-1000)+477.1=\overline{70}.1+\overline{523}.1=\overline{593}.2$，

∴ $0.2^{100}\times0.3^{1000}$ 的小数点后面连续有 592 个零．

例 5 已知 $6^a=9$，试用 a 的代数式表示 $\log_6\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$．

解 ∵ $6^a=9$，∴ $\log_69=a$，∴ $\log_63=\frac{a}{2}$，

∴ $\log_62=\log_66-\log_63=1-\log_63=1-\frac{a}{2}$．

$\therefore \log_6 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \log_6 \frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_6 3 =$

$\frac{1}{3}\left(1-\frac{a}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{3} - \frac{a}{6} - \frac{a}{4} = \frac{1}{3} - \frac{5a}{12}$.

练习三十三

1. 填充：

(1) 已知 $\lg 2 = 0.3010$

若 $\lg x = -2.6990$，则 $x =$ _____；

若 $\lg x = -1.3010$，则 $x =$ _____；

若 $\lg x = 0.03010$，则 $x =$ _____；

若 $\lg x = 2.3010$，则 $x =$ _____.

(2) 如果 $\lg a = 2.3771$，$\lg b = -1.6229$，则

$a : b =$ _____.

(3) 已知 $\lg x = -1.2034$，则 x^2 的常用对数的首数是 _____，尾数是_____.

(4) m 为常用对数的尾数，则 $\sqrt{m^2 - 2 + m^{-2}} =$ _____.

2. 选择题：

(1) 下列等式正确的是(　　).

① $\frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\lg a^2}{\lg b^2}$　② $\left(\frac{\lg a}{\lg b}\right)^2 = \frac{\lg a^2}{\lg b^2}$

③ $\lg(a+b) = \lg a + \lg b$　④ $\lg a + \lg b = \lg(ab)$

A 只有②　　B ①和④

C ②和④　　D ①③和④

(2) $\lg a + \lg\frac{1}{a} =$ (　　).

A 1　　B a^2　　C $\frac{1}{a^2}$　　D 0

(3) 如果 $\lg m = b - \lg n$，则 $m =$（　　）.

A $\frac{b}{n}$　　B bn　　C $10^b n$　　D $b - 10^n$　　E $\frac{10^b}{n}$

(4) 如果 $\lg(x+3) + \lg(x-1) = \lg(x^2 - 2x - 3)$，则 x 值（　　）.

A 可取任一实数　B 不存在　C 取 0 之外所有实数

D 只有 $x = 0$　　E 取 1 之外所有实数

3. 计算：

(1) $\log_3 \frac{1}{9} + \log_4 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{1}{3} + \log_3 \sqrt{3}$

(2) $|1 - \lg 0.001| + \sqrt{\left(\lg \frac{1}{3}\right)^2 - 4\lg \frac{1}{3} + 4}$

$- \lg 6 + \lg 0.02$

(3) $\lg 72 - \lg 2 + 2\sqrt{\lg^2 6 - 2\lg 6 + 1}$

(4) $\lg 14 - 2\lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18$

(5) $\frac{\lg 243}{\lg 9}$

4. 已知 $2\lg(x - 2y) = \lg x + \lg y$，(1)求证 $x = 4y$；(2) 求 $\log_2 \frac{x}{y}$ 的值.

5. 已知 $\sqrt{\lg(3x + 2y)} + |3x - 2y + 7| = 0$，求 $\log_{\sqrt{2}-1} \frac{\sqrt{2}\,y - 2x}{2}$ 的值.

6. 已知 $\lg 0.5084 = \overline{1}.7062$，(1) 508.4^{20} 是几位整数？

(2) 5.084^{-20} 的小数点后连续有多少个零？

第34天　对数的应用

复习要求：

1．掌握利用对数解有关应用题的方法；

2．能综合应用有关的对数知识．

例1　某厂计划从明年起每年比上一年增产10%，几年后产量可达现在的3倍？

分析：设今年的产量为1，则一年后的产量为$1+1\cdot10\%=1+10\%$，两年后的产量为$(1+10\%)+(1+10\%)10\%=(1+10\%)^2$，三年后的产量为$(1+10\%)^2+(1+10\%)^2\cdot10\%=(1+10\%)^3$……$x$年后的产量为$(1+10\%)^x$．

解　设x年后产量可达现在的3倍，则依题意，得

$(1+10\%)^x=3$．

$x\lg1.1=\lg3$，

$$x=\frac{\lg3}{\lg1.1}=\frac{0.4771}{0.0414}=11.52\text{年}.$$

答：12年后产量可达现在的3倍．

例2　某项机器设备，原先价值50万元，由于使用损耗，每年折旧率为6.25%，问5年后这项设备价值多少？

分析：例2和例1的解题思路相似，由于题中给出的是损耗，所以设备的价值每年是上年的$(1-6.25\%)$．

解　设5年后这项设备价值x万元，依题意，得

$x=50(1-6.25\%)^5$．

$x=50\times0.9375^5$，

$\lg x=\lg50+5\lg0.9375=1.0990+5\times\overline{1}.9696=1.5585$，

$\therefore\ x=36.181$．

答：5年后这项设备价值36.18万元.

例3 若a、b、c分别是直角三角形的两条直角边和斜边．试证：$\lg a=\frac{1}{2}[\lg(c+b)+\lg(c-b)]$．

证明 由勾股定理，得$a^2=c^2-b^2$．

$\therefore\ a^2=(c+b)(c-b)$． ①

① 式两边取对数 $\lg a^2=\lg[(c+b)(c-b)]$，

$2\lg a=\lg(c+b)+\lg(c-b)$，

$\therefore\ \lg a=\frac{1}{2}[\lg(c+b)+\lg(c-b)]$．

例4 已知$7.2^x=3$，$0.8^y=3$，求证：$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2$．

证明 对已知式$7.2^x=3$的两边取常用对数，得$\lg 7.2^x=\lg 3$，$x\lg 7.2=\lg 3$，$x=\frac{\lg 3}{\lg 7.2}$，$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{\lg 7.2}{\lg 3}$．

对已知式$0.8^y=3$的两边取常用对数，得$\lg 0.8^y=\lg 3$，$y\lg 0.8=\lg 3$，$y=\frac{\lg 3}{\lg 0.8}$，$\therefore\ \frac{1}{y}=\frac{\lg 0.8}{\lg 3}$．

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{\lg\frac{7.2}{0.8}}{\lg 3}=\frac{\lg 9}{\lg 3}=\frac{2\lg 3}{\lg 3}=2.$$

$\therefore$ 原式得证．

由例4可以看出，取式子的对数是利用对数解题的一种常用方法，用这种方法可将指数间的关系化为对数间的关系，使解题容易．

例5 化简$\sqrt{4^{\log_2\lg x}-2\lg x+1}$．

解 $\because$ $\log_2\lg x$有意义，$\therefore$ $\lg x>0$，$\therefore$ $x>1$．

原式$=\sqrt{\lg^2 x-2\lg x+1}=|\lg x-1|$

$$=\begin{cases}\lg x-1 & (x\geqslant 10)\\ 1-\lg x & (1<x<10)\end{cases}.$$

练习三十四

1. 选择题：

(1) $\sqrt{\lg^2 2-\lg 2^2+1}$ 的值是(　　)。

A 1　　B $\lg 2-1$　　C $\pm(1-\lg 2)$　　D $\lg 5$

(2) 对数 $\lg a$ 和 $\lg b$ 互为相反数，则有(　　)。

A $a+b=0$　B $a+b=1$　C $ab=1$　D $\frac{a}{b}=1$

(3) 如果 a、b 互为倒数，且 $a>0$，$b>0$，那么这两个数的常用对数的和是(　　)。

A 1　　B $2\lg 2$　　C 0　　D -1

(4) 设 $\lg x-\lg y=a$，则 $\lg 5x^3-\lg 5y^3$ 的值等于(　　)。

A $15a$　　B $3a$　　C $5a$　　D a^3

2. 综合题：

(1) 已知 $P=\lg\sqrt{x+1}$，$Q=\lg\sqrt{4-x}$，$R=\lg\sqrt{x-2}$，x 取何值时，① P、Q、R 都有意义；② $P+Q-R$ 的值为 $\lg 2$。

(2) 已知 $3^{15a}=5^{5b}=15^{3c}$，求证 $5ab-bc-3ac=0$。

(3) 已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，且关于 x 的二次方程 $x^2-2x+\lg(c^2-b^2)-2\lg a+1=0$ 有等根，试判断 $\triangle ABC$ 的形状。

3. 应用题：

制造某种产品，计划经过三年使成本降低 40%，问平均每年降低百分之几？($\lg 6=0.7782$，$\lg 8435=3.9261$)

第35天　练习三十五

1. 填充：

(1) 已知 $\lg A$ 的首数是 3，与 $\lg 0.0375$ 的尾数相同，则 $A=$ _____。

(2) a、b 为实数，且满足 $\dfrac{(2-a)^2+|3-b^2|}{b-\sqrt{3}}=0$，则 $\log_{a-b}\dfrac{1}{a+b}=$ _____。

(3) $\lg\dfrac{2}{3}$ 的相反数_____，倒数_____，绝对值_____。

(4) 已知 $\lg x=3\lg(m+n)+2\lg m-\lg(m-n)$ $(m>n)$，则 $x=$ _____。

(5) $\dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{1-2x}}$ 中，x 的取值范围是_____。

(6) 已知 $\lg 6=0.7782$，则 $10^{2.7782}=$ _____。

(7) 若 m 为已知整数，则 $\lg\left(\dfrac{1}{9}\times 10^m\right)$ 的首数是_____。

(8) 若两个不等于 1 的正数 a 与 b 互为倒数，则 $\log_a b=$ _____。

2. 选择题：

(1) $\lg|x|=\lg x$ 成立的条件是(　　)。

A $x>1$　　B $x\geqslant 1$

C $0<x<1$　　D x 为一切正实数

(2) 下列各组数中，互为相反数的是(　　)。

A $(1-\lg 2)^2$ 和 $(1-\lg 5)^2$

B $1+(\lg 2)^2$ 与 $1+(\lg 5)^2$

C $1-\lg 2^2$ 与 $1-\lg 5^2$

D $1-(\lg 2)^2$ 与 $1-(\lg 5)^2$

(3) 已知一个正数 M 的倒数 $\frac{1}{M}$ 的常用对数首数为 a，尾数为 b，则 M 的常用对数的首数和尾数应是(　　).

A 首数 $-a$，尾数 $-b$

B 首数 $\frac{1}{a}$，尾数 $\frac{1}{b}$

C 首数 $-a-1$，尾数 $-b+1$

D 首数 $-a$，尾数 b

(4) 如果某工厂的产值月平均增长率为 p，那么年增长率为(　　).

A $12p$　　B $(1+p)^{11}$

C $(1+p)^{12}$　　D $(1+p)^{12}-1$

(5) 若 $a>b>0$，则 $\lg(a^2-b^2)$ 可化为(　　).

A $\lg a^2-\lg b^2$　　B $\log\frac{a^2}{b^2}$

C $\lg(a+b)+\lg(a-b)$　　D $\frac{\lg a^2}{\lg b^2}$

(6) 若 $\lg x=10+\lg a$，则 x 等于(　　).

A $10a$　　B a^{10}

C $10^{10}a$　　D $100a$

(7) $\lg a(a>0)$ 的尾数是 m，则 $\sqrt{m^2}+|m-1|$ 等于(　　).

A 1　　B $2m-1$

C $1-m$　　D 以上都不是

3. 计算：

(1) $\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)^0+(0.125)^{-\frac{1}{3}}-\frac{\lg^2 5-\lg^2 2}{1-\lg 4}$；

(2) $(\lg 3)^0-10^{\lg 3}(\log_9 6-\log_9 2)$；

(3) $4\lg 2+\lg\frac{4}{9}-\lg 64+2\lg 3$；

(4) $\log_5 75-\log_5 6+\frac{1}{2}\log_5 4$.

4. 综合题：

(1) 设 $a:b:c=1:2:3$，求 $\lg\frac{c}{a+b}+\lg\frac{a}{b+c}+\lg\frac{b}{c+a}$ 的值.

(2) 已知 $\lg m$、$\lg n$ 是方程 $2x^2-4x+1=0$ 的两根，求 $\left(\lg\frac{m}{n}\right)^2$ 的值.

(3) 已知 $\lg 175=a$，$\lg 245=b$，求 $\lg 350$.

(4) 如果 $\lg^2 x\cdot\lg 10x>0$，求 $\frac{1}{\lg 10x}\cdot\sqrt{\lg^2 x+\lg 10x^2}$ 的值.

(5) 已知 $y=10^{\frac{1}{1-\lg x}}$，$z=10^{\frac{1}{1-\lg y}}$，求证 $x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

5. 应用题：

(1) 某工厂计划每年增产 18.5%，问经过多少年后可使产量翻两番?

(2) 某工厂的年产量 1988 年比 1981 年增长 5.2 倍，求每年的平均增长的百分数.

六、函　数

本单元分5天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见下页表.

第36天　直角坐标系

复习要求:

会求平面直角坐标系内点的坐标，熟练地应用两点距离公式.

例1　在直角坐标系内,已知 $A(4, y_1)$,$B(x_2, 6)$,根据下列条件,求出 y_1, x_2的值.

(1) A、B 关于 x 轴对称，(2) A、B 关于 y 轴对称，(3) A、B 关于原点对称，(4) AB 平行于 x 轴，(5) AB 平行于 y 轴.

解　(1) $y_1=-6$，　$x_2=4$.

(2) $y_1=6$，　$x_2=-4$.

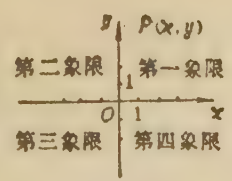
(3) $y_1=-6$，　$x_2=-4$.

(4) $y_1=6$，　x_2 为一切实数.

(5) y_1 为一切实数，$x_2=4$.

本题要弄清在同一坐标系内关于 x 轴、y 轴、原点、对称的点的坐标间的关系，与 x 轴、y 轴平行的直线上的点的坐标间的关系.

例2　已知点 P 的横坐标是 -4,点 P 与点 $A(1,-3)$的距离等于5,求点 P 的纵坐标.



坐　　标　　法

在平面内建立了平面直角坐标系，就可以把“形”和“数”结合起来，用代数方法来研究几何图形

平面上点 P ⟷ 有序实数对 (x,y)
——一对应

点 P 在坐标轴上的坐标

x 轴	y 轴	原点
$(x,0)$	$(0,y)$	$(0,0)$

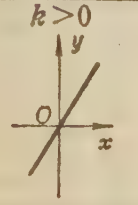
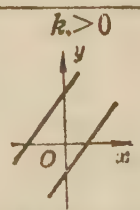
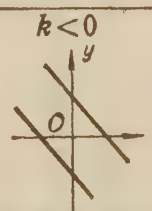
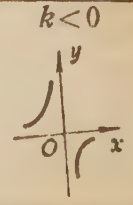
函　数　概　念

1. 常量与变量
2. 自变量取值范围

函数的图象表示
1. 已知函数解析式用描点法画图象
2. 已知图象，求曲线上的点的坐标

$P(x,y)$ 关于
- 横轴的对称点 $(x,-y)$
- 纵轴的对称点 $(-x,y)$
- 原点的对称点 $(-x,-y)$

平面内两点间的距离
已知 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$
$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

函数	一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0)$		反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$
	正比例函数 $y=kx(b=0)$	$y=kx+b$ $(b\neq0)$	
图象	$k>0$  $k<0$	$k>0$  $k<0$ 	$k>0$ $k<0$ 
性质	是经过(0,0)和(1,k)的一条直线 $x\nearrow\Rightarrow y\nearrow$ (指 x 增大)　$x\nearrow\Rightarrow y\searrow$ (指 y 减小)	是经过(0,b)且平行于直线 $y=kx$ 的直线 $x\nearrow\Rightarrow y\nearrow$　$x\nearrow\Rightarrow y\searrow$	是以原点为对称中心的双曲线 图象分别在第一、三象限内 $x\nearrow\Rightarrow y\searrow$　图象分别在第二、四象限内 $x\nearrow\Rightarrow y\nearrow$
	k 表示直线 $y=kx$ 或 $y=kx+b$ 对 x 轴的倾斜程度 $\lvert k\rvert$ 越小(大)，直线和 x 轴所夹的锐角越小(大)		双曲线的两个分支都无限接近 x 轴 y 轴，但永远不能到达

解 由已知条件，可得点 P 的坐标是$(-4, y)$，

$\because |AP|=5$，由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{[1-(-4)]^2+(-3-y)^2}=5.$$

即$\sqrt{(y+3)^2+25}=5$把方程两边平方得$(y+3)^2=0$，

$\therefore$ $y=-3$，故点 P 的坐标是$(-4,-3)$。

想一想：（1）如果已知 P 的横坐标是-2，其他条件不变，点 P 的纵坐标将是多少？

（2）如果已知点 P 的横坐标是-6，其他条件不变，结果如何？

本题由于点 P 横坐标的变化，其纵坐标可能有一解，两解，无解三种情形。

例 3 在直角坐标系内$A(2,1)$，$AB=12$，根据下列条件，求出 B 点的坐标。

（1）B 点在 x 轴上，（2）B 点在 y 轴上，（3）B 点在第一、三象限的角平分线上，（4）B 点与 y 轴的距离为 5。

分析：（1）$\because B$ 点在 x 轴上，$\therefore B(x,0)$，根据两点距离公式列出方程，求出 x，写出 B 点的坐标。

x 轴上，y 轴上以及第一、三象限的角平分线上点的坐标特征：其点的坐标应分别为$(x,0)$、$(0, y)$、(x,x)。

当点 B 与 y 轴的距离为 5 时，则点 B 在与 y 轴平行且分布在 y 轴两侧的直线 l_1、l_2 上，故设其坐标为$(5, y)$、$(-5,y)$。

例 4 等边三角形的边长为 $2a$，一顶点为$(0,0)$，且一边在 x 轴的正方向上，求其余两顶点的坐标。

本题要注意存在两解情况。如图 36-1，36-2。

想一想：如果边长为 4 的菱形 $ABCD$，其中一内角为 $60°$，且 $A(0,0)$，$B(4,0)$，则 C、D 两点的坐标有几种情形？

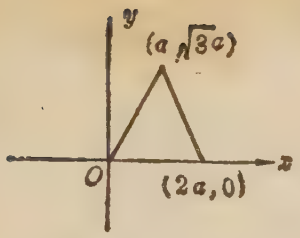


图 36-1

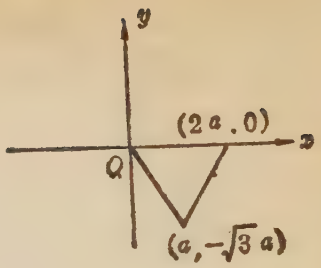


图 36-2

例 5 直角坐标系内，已知 $A(1,0)$，$B(7,0)$，$C(4,6)$，试确定三角形的形状，且求出 BC 边上的高 AD 的长.

解 如图36-3. $AC=\sqrt{58}$，$BC=\sqrt{58}$，$AB=6$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

$\because AB$ 上的高 $CE=6$（即 C 的纵坐标），

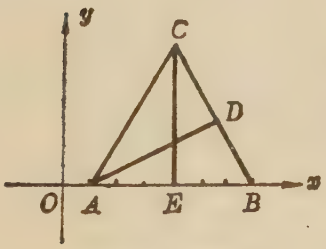


图 36-3

$$\because \quad S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE$$

$$=\frac{1}{2}BC\cdot AD,$$

$$\therefore \quad AD=\frac{AB\cdot CE}{BC}=\frac{6\cdot 6}{\sqrt{58}}=\frac{36\sqrt{58}}{58}.$$

判定三角形形状，如确定了等腰三角形后，还要研究一下是否为直角三角形，可作出草图，有利解题.

练习三十六

1. 填空：

(1) 已知点 $A(a,b)$，关于 x 轴对称的点的坐标是_____，关于 y 轴对称的点的坐标是_____，关于原点对称的点的坐标是_____，关于一、三象限角平分线对称的点的坐标是_____，关于二、四象限角平分线对称的

点的坐标是_____。

(2) 如果点 $P_1(9, 2)$ 与 $P_2(5, k)$ 间的距离是 $2\sqrt{5}$，则 $k=$ _____。

(3) 如果 $x-y=0$，则点 $A(x,y)$ 的位置在_____，如果 $x=|y|$，则点 $A(x, y)$ 的位置在_____，如果 $xy=0$，则点 $A(x,y)$ 的位置在_____。

(4) 一个菱形的边长为 5，一条对角线长为 8，取两条对角线为坐标轴，则各顶点的坐标是_____。

2. (1) 试分别求出与两点 $A(-1, 3)$，$B(2, 4)$ 等距离，且在 x 轴或 y 轴上的点的坐标。

(2) 试在 x 轴上找一点 B，在 y 轴上找一点 C，使它与已知点 $P(1,2)$ 组成一等边三角形，求 B、C 的坐标。

第 37 天　函数有关概念

复习要求：

1. 根据已知条件写出函数关系式；

2. 掌握求自变量的取值范围与函数值的方法。

例 1　某同学带 5 元钱去新华书店买数学辅导书，已知每册定价 9 角 4 分，写出买书余下的钱 y 元和买的册数 x 之间的函数关系式，并画出函数图象。

解　关系式为：$y=5-0.94x$

∵ x 是买书的册数，∴ x 必须是非负整数。又∵买书的钱数不能超过 5 元，∴最多只能买 5 本。

∴ 函数的自变量取值范围为 $0\leqslant x\leqslant 5$ 的整数。

x(册)	0	5
y(元)	5	0.30

图 37-1

解答这类问题，

① 要弄清什么是自变量与什么是自变量的函数，然后确定它们的关系式；

② 要根据实际问题的意义，确定自变量取值范围，此题不能忽视书的册数是非负整数。

例 2 求下列函数自变量取值范围，并求 $x=1$ 时的函数值；当 x 取何值时，函数值为 1．

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-x-2}$；　(2) $y=-\sqrt{5-2x}$；

(3) $y=\lg(2x-1)$.

解 (1) $x^2-x-2\neq 0$，$(x-2)(x+1)\neq 0$，∴ $x\neq 2$ 且 $x\neq -1$，∴ x 的取值范围是除 2，-1 以外的所有实数。当 $x=1$ 时，$y=\dfrac{1}{1^2-1-2}=-\dfrac{1}{2}$；

函数值为 1 时，$\dfrac{1}{x^2-x-2}=1$，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

(2) $5-2x\geqslant 0$，$2x\leqslant 5$，$x\leqslant\dfrac{5}{2}$.

可知 x 的取值范围是不大于 $2\dfrac{1}{2}$ 的所有实数。当 $x=1$ 时，$y=-\sqrt{5-2\times 1}=-\sqrt{3}$.

函数值为 1 时，∵ $y=-\sqrt{5-2x}\leqslant 0$，∴找不到 x 的值能使函数值为 1．

(3) $2x-1>0$，$2x>1$，$x>\dfrac{1}{2}$，可知 x 的取值范围是大于 $\dfrac{1}{2}$ 的所有实数.

当 $x=1$ 时，$y=\lg(4-1)=\lg 3$.

函数值为 1 时，$\lg(2x-1)=1$，$2x-1=10$，$x=5\frac{1}{2}$.

求函数的自变量取值范围，常见有分式、根式、对数三种类型，要抓住分母不为零，偶次根式被开方数不为负，真数为正，复杂类型以此为基础进行具体分析.

例 3 选择题：

下列各函数中

① $y_1=x$；② $y_2=|x|$；③ $y_3=(\sqrt{x})^2$；④ $y_4=\frac{x^2}{x}$；⑤ $y_5=\sqrt[3]{x^3}$；⑥ $y_6=2^{\log_2 x}$ 相同的函数有(　　).

A ①②⑤⑥　　B ①⑤⑥　　C ①⑤　　D ①④⑤

分析：判定两个函数相同，关键是抓住两点：一看变量 x 与 y 的对应法则是否相同，即函数的表达式是否相同或可化为同一个表达式；二看自变量 x 的取值范围是否相同，两者缺一不可. $y_1=x$，x 为一切实数；$y_2=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$；$y_3=(\sqrt{x})^2$，$x\geqslant 0$；$y_4=\frac{x^2}{x}$，$x\neq 0$；$y_5=\sqrt[3]{x^3}$，$x$ 为一切实数；$y_6=2^{\log_2 x}$，$x>0$. ∴ 只有 y_1 与 y_5 是相同的函数.

例 4 作下列函数的图象

(1) $y=\sqrt{x^2}$

解 $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$.　　(图见37-2)

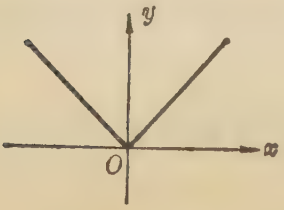


图 37-2

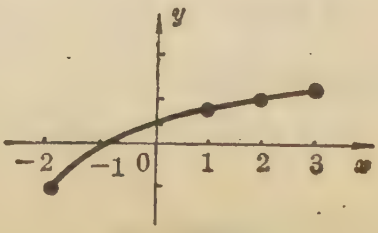


图 37-3

(2) $y=\sqrt{x+2}-1$　　(图见37-3)

x	-2	-0	0	1	2	3
y	-1	0	0.41	0.73	1	1.24

用描点法作函数图象分三步:列表,标点,连线,连线时一般要连结成平滑的曲线.

练习三十七

1. 填空:

(1) 表示函数的方法有____、____、____三种.

(2) 弹簧秤的弹簧长 5 厘米,在 0～7.5 千克的载重限度内,每加重一千克,弹簧伸长 0.4 厘米, 载重后弹簧长度为 y (厘米) 与挂重 x (千克)之间函数关系式是_____,自变量取值范围是_____.

(3) 函数 $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{x-1}$自变量 x 的取值范围是_____.

(4) 函数 $y=\dfrac{3|x|-2}{3-\sqrt{x-3}}$ 自变量 x 的取值范围_____,并当 $x=4$ 时,函数值是_____.

2. 选择题:

(1) 函数 $y=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x^2}}$中,自变量取值范围是(　　).

A $x\neq 1$　B $x\neq -1$　C $x\neq 0$　D $x\neq \pm 1$ 且 $x\neq 0$.

(2) x 与 y 之间的关系式表为

x	0	1	2	3	4
y	100	90	70	40	0

则 x, y 之间的关系

式为(　　).

A $y=100-10x$　　B $y=100-5x^2$

C $y=100-5x-5x^2$　　D $y=20-x-x^2$

(3) 指出下列哪一组两个函数所画出的图象完全相同:

A $y=x$ 与 $\frac{y}{x}=1$　　B $y=x$ 与 $y=2^{\log_2 x}$

C $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$　　D $|y|=|x|$ 与 $y^2=x^2$

3. 火车在7小时内由 A 到达 B，已知前3小时内它的行驶速度为50千米/小时，在后4小时内，它的行驶速度为60千米/小时. 设 x 表示时间(小时)，y 表示路程(千米)，试写出它走过的路程与时间的函数关系式.

4. 用描点法作 $y=2x-3$ 的图象.

第38天　正、反比例函数和一次函数(一)

复习要求:

1. 根据已知条件求正、反比例函数，一次函数的解析式;

2. 正确作出函数的图象，且由图象的特点，讨论函数的性质.

例1　选择题:下列命题中，正确的是(　　).

A 正方形面积公式 $S=a^2$ 中，S 和 a 成正比例

B $xy=-\frac{1}{2}$，y 与 x 不成正比例，也不成反比例

C 扇形的面积公式中 $S=\frac{n\pi R^2}{360}$ 中，S 一定，R^2 与 n 成反比例

D $y=x-2$，y 与 x 成正比例

分析：此题中 A S 与 a 不成正比例；S 与 a^2 才成正比例；B x 与 y 是成反比例；D $y=x-2$ 是一次函数，y 与 x 不成正比例，y 与 $x-2$ 成正比例；而 C 中 R^2 与 n 是成反比例，故选 C.

例 2 设 $y=(2n+1)x^{n^2+n-1}$，

(1) 当 n 为何值时，y 与 x 是正比例函数，且图象经过一、三象限.

(2) 当 n 为何值时，y 与 x 是反比例函数，且在每个象限内 y 随着 x 的增大而增大.

解 (1) $\begin{cases}2n+1>0\\ n^2+n-1=1,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}n>-\frac{1}{2},\\ n_1=-2\text{或}n_2=1,\end{cases}\therefore n=1.$

(2) $\begin{cases}2n+1<0\\ n^2+n-1=-1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}n<-\frac{1}{2},\\ n_1=0\text{ 或 }n_2=-1,\end{cases}$

$\therefore\quad n=-1.$

正比例函数 $y=kx$，x 的次数为 1.

反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，x 次数为 -1.

例 3 有 x 的正比例函数、反比例函数、一次函数各一个，已知 $x=4$，$y=8$ 是一次函数和正比例函数的一组公共的对应值，而 $x=-2$，$y=2$ 是一次函数和反比例函数的一组公共的对应值.

(1) 求这三个函数的解析式，并求 $x=-1.5$ 时，各函数对应的 y 值各是多少？

(2) 作出这三个函数的图象，用图象法验证上述结果.

分析：关键是运用待定系数法确定函数的解析式，反比

例函数图象用描点法作出，其余按函数特点作出图象.

解 (1) 设正比例函数,反比例函数,一次函数的解析式分别是 $y=k_1x$, $y=\frac{k_2}{x}$, $y=k_3x+b$.

已知条件：$8=4k_1$, $k_1=2$.

∴正比例函数解析式为 $y=2x$. 当 $x=-1.5$ 时,$y=-3$;

$2=\frac{k_2}{-2}$, $k_2=-4$, ∴反比例函数的解析式为 $y=-\frac{4}{x}$.

当 $x=-1.5$, $y=\frac{8}{3}$;

$$\begin{cases} 8=4k_3+b \\ 2=-2k_3+b \end{cases}$$

解得 $k_3=1, b=4$.

∴一次函数解析式为 $y=x+4$.

当 $x=-1.5$ 时, $y=2.5$.

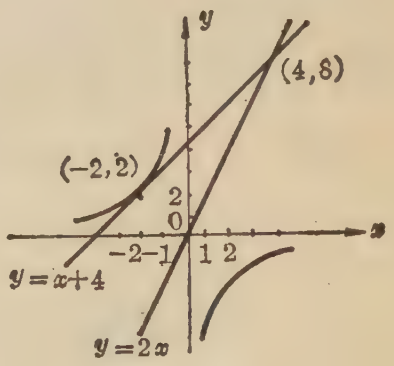


图 38-1

(2) $y=2x$ 和 $y=x+4$ 的图象都是直线. 可由已知分别连结(0,0),(4,8)和(4,8), (−2, 2)而得到.

$y=-\frac{4}{x}$,

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	1	$\frac{4}{3}$	2	4	-4	-2	$-\frac{4}{3}$	-1

在同一直角坐标系内,分别作 3 个函数的图象,如图 38-1,由图看出,各图象上横坐标为 −1.5 的点的纵坐标,与上述计算所得结果近似.

从上例可看出： ① 正、反比例函数都只有一个参数 k, 而一次函数有两个参数 k、b,所以,前者只要一组 x,y 的对应值,而后者却要两组,才能确定函数解析式, 确定函数解

析式时，要用待定系数法，解方程(组)求出有关参数.

② 正比例函数、一次函数图象为直线，可由两点连成，其他函数一般要用描点法画出图象.

例 4 根据下列条件判定直线经过哪几个象限.

(1) $y=kx+b$ ① $k>0$, $b>0$; ② $k>0$, $b<0$;

③ $k<0$, $b>0$; ④ $k<0$, $b<0$.

解 ① 直线过Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ象限;

② 直线过Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ象限;

③ 直线过Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ象限;

④ 直线过Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限.

(2) $y=\frac{1}{b}(ax-c)$, 其中 $ab>0, bc>0$.

解 $y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, $\because ab>0$, $bc>0$, $\therefore \frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$, $\therefore$直线过Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ象限.

要弄清楚 $y=kx+b$ 中 k、b 的正负与图象的位置关系.

练习三十八

1. 填空:

(1) 平行四边形面积一定时，它的一边和这边上的高是_____函数关系.

(2) 已知 $y-2$ 与 x 成正比，且当 $x=-1$ 时，$y=7$，那么 y 和 x 的函数关系式是_____.

(3) 已知 $y=(m^2+2m)x^{m^2+m-1}$,

当 $m=$_____，函数为反比例函数，它的图象在第___象限.

(4) 一次函数 $y=kx+b$ 的图象过点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，若 $k<0$，$x_1<x_2$，则 y_1 与 y_2 的大小关系是_____。

(5) 一次函数的图象平行于直线 $y=-5x$，交反比例函数$y=-\frac{4}{x}$的图象于点$(2,h)$，则 $h=$_____，这个一次函数的解析式为_____。

2. 选择题：

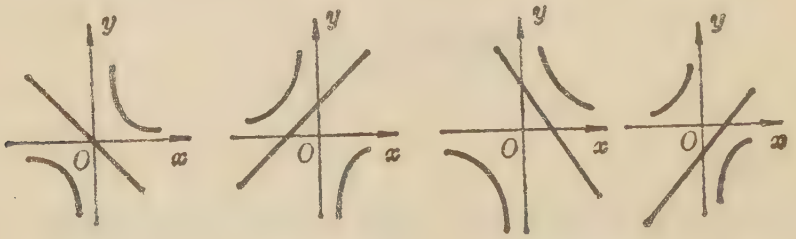
(1) 若 $y=(a+1)x^{a^2-a-1}$ 是正比例函数，则 a 的值是(　　)。

A -1　B 2　C -1 或 2　D 0 或 1

(2) 正比例函数 $y=kx$ 的自变量取值增加 1，函数值就相应地减小 4，则 k 的值为(　　)。

A 4　B -4　C $\frac{1}{4}$　D $-\frac{1}{4}$

(3) 函数$y=-k(x+1)$和 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$，在同一坐标系内的图象是下列四个图象之一，那么它们的图象是(　　)。



A　B　C　D

图 38-2

3. 已知函数 $y_1=-\frac{3}{2}x+6$ 和 $y_2=kx+\frac{3}{2}$的图象都通过点 $A(2,3)$，

(1) 求函数 $y_2=kx+\frac{3}{2}$中的 k 的值；

(2) 在同一坐标系中画出函数 y_1 和 y_2 的图象；

(3) 求函数 y_1，y_2 的图象与 x 轴围成的三角形面积。

第 39 天　正、反比例函数和一次函数(二)

复习要求：

综合应用函数的有关知识，提高解综合题的能力。

例 1　已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成反比例，y_2 与 x^2 成正比例，并且 $x=2$ 时，$y=14$；$x=3$ 时，$y=28\frac{1}{3}$，求 y 和 x 间的函数关系。

分析：本题关键是应用正比例函数和反比例函数的概念，列出解析式组成方程组，求出比例常数。

解　y_1 与 x 成反比例，设 $y_1=\frac{k_1}{x}(k\neq 0)$，

y_2 与 x^2 成正比例，设 $y_2=k_2x^2(k_2\neq 0)$，

$$y=y_1+y_2=\frac{k_1}{x}+k_2x^2.$$

$\because$ $x=2$ 时，$y=14$；$x=3$ 时，$y=28\frac{1}{3}$.

$$\therefore \begin{cases} 14=\frac{k_1}{2}+4k_2, \\ 28\frac{1}{3}=\frac{k_1}{3}+9k_2, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k_1=4, \\ k_2=3, \end{cases}$　$\therefore$　$y=\frac{4}{x}+3x^2$.

注意：y_1 与 x 成反比例的比例系数 k_1 和 y_2 与 x^2 成正

比例的比例常数 k_2 并不一定相同，因而在列式时不要使用一个字母.

例 2 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过定点 $D(1,3)$，且与 x 轴正半轴交于 A 点，与 y 轴正半轴交于 B 点.

(1) 以 k 表示 OB 与 OA 的长，

(2) 已知直角三角形 OAB 的内切圆面积为 π 分别求出 k 与 b 的值.

分析：本题关键要正确理解函数的意义，掌握在坐标轴上的点的坐标特点.

解 (1) $\because y=kx+b$ 的图象过点 $D(1,3)$，

$\therefore\ 3=k+b$，即 $b=3-k$.

设 x 轴正半轴 A 点坐标$(x_1,0)$，y 轴正半轴 B 点坐标为 $(0,y_2)$.

$$\therefore\ 0=x_1\cdot k+b,\quad \therefore\ x_1=-\frac{b}{k}=\frac{k-3}{k}.$$

$$\therefore\ y_2=b,\ y_2=3-k.$$

$$\text{即}\quad OA=x_1=\frac{k-3}{k},\quad OB=y_2=3-k.$$

(2) 设圆的半径为 R，则 $\pi R^2=\pi$，$\therefore R=1$.

又$\because \triangle BAO$ 是直角三角形，由面积公式，

$$S=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}(OA+OB+AB)\cdot R.$$

$$AB=\sqrt{(3-k)^2+\left(\frac{k-3}{k}\right)^2}\ \text{且}\ 3-k>0,\ k<0,$$

$$\therefore (3-k)\cdot\frac{k-3}{k}=\sqrt{(3-k)^2+\left(\frac{k-3}{k}\right)^2}+3-k+\frac{k-3}{k},$$

$$\therefore\ \frac{k-3}{k}=1-\frac{1}{k}+\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}},$$

$\therefore \left(\frac{-2}{k}\right)^2 = \frac{k^2+1}{k^2}$ $\therefore$ $k^2=3$,

$\therefore k=-\sqrt{3}$ ($k=\sqrt{3}$舍去).

$\therefore b=3+\sqrt{3}$.

要注意由 $OB=3-k>0$ 得 $k<0$，因而 $k=\sqrt{3}$ 要舍去.

例 3 如图 39-1，在直角三角形 ABC 中 $\angle C=90°$，已知 $AC=20$cm，$BC=15$cm.

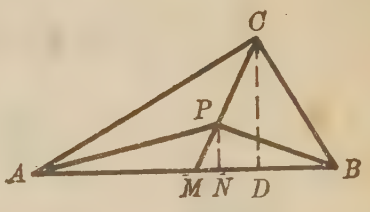


图 39-1

(1) 求 AB 边上中线 CM 的长；

(2) 在 CM 上取一点 P（点 P 与点 C、点 M 不重合），求出 $\triangle APB$ 的面积 y（平方厘米）与 CP 的长 x（厘米）之间的函数关系式；

(3) 在下面的直角坐标系中，画出这个函数的图象.

解 (1) 由勾股定理得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25$(cm),

$\therefore CM=\frac{1}{2}AB=12.5$(cm).

(2) 作 $CD\perp AB$，$PN\perp AB$，垂足为 D、N.

$\because \triangle APB$ 和 $\triangle ACB$ 为同底的两个三角形，

$\therefore \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{PN}{CD}$，而 $CD\parallel PN$，

$\therefore \frac{PN}{CD}=\frac{PM}{CM}=\frac{12.5-x}{12.5}$.

$\because S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\times 20\times 15=150(\text{cm}^2)$，

$\therefore S_{\triangle APB}=150\times\frac{12.5-x}{12.5}$

$=150-12x$.

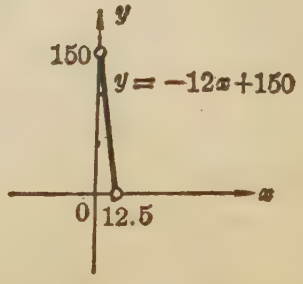


图 39-2

即 $y=-12x+150$.

(3) 作函数图象：在 x 轴上于 50 的 $\frac{1}{4}$ 长处画小圈，在 y 轴上于 150 处画小圈，将两小圈用线段连结，则此线段即表示函数 $y=-12x+150$ 的图象。图象中不包含(12.5，0)及(0，150)两点.

想一想：不添线如何解法？

练习三十九

1. 已知 $y-1$ 与 $x+1$ 成正比例函数关系，

(1) 若比例系数为 2，试将 y 表示成 x 的函数，并画出函数的图象.

(2) 若比例系数为正数 k，函数图象与坐标轴围成的三角形面积为 2，求 k 的值.

2. 已知 $y_1=2x-3$，$y_2=3x+2$.

(1) x 分别取何值时，$y_1=0$，$y_1>0$，$y_1<0$；

(2) x 分别取何值时，$y_1=y_2$，$y_1>y_2$，$y_1<y_2$.

3. 在直角坐标系中，直线 $y=kx+b$ 经过三点：$A(2,0)$，$B(0,2)$，$C(m,3)$.

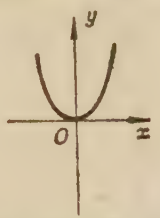
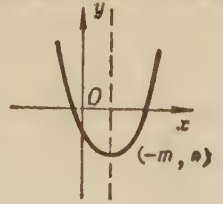
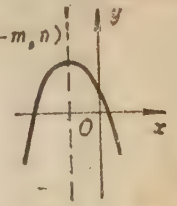
(1) 求这条直线的函数关系式，并画出这条直线，

(2) 求 m 值和 AC 的长度.

第 40 天　二次函数(一)

这一节的主要内容见下页表.

复习要求：

函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$			
	$y=ax^2$ $(b=c=0)$		$y=a(x+m)^2+n$	
图象				
性质 开口	开口向上，无限延伸	开口向下，无限延伸	开口向上，无限延伸	开口向下，无限延伸
性质 开口	$\lvert a\rvert$越大(小)，开口越小(大)			
性质 对称轴	y轴　直线 $x=-\frac{b}{2a}$			
性质 顶点	$(0,0)$	$(0,0)$	$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$	$\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$
性质 最值	当 $x=0$ 时，y 最小值$=0$	当 $x=0$ 时，y 最大值$=0$	当 $x=-\frac{b}{2a}$，y 最小值$=-\frac{\Delta}{4a}$	当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 最大值$=-\frac{\Delta}{4a}$
性质 增减值	当 $x<0$，y 随 x 增大而减小 当 $x>0$，y 随 x 增大而增大	当 $x<0$，y 随 x 增大而增大 当 $x>0$，y 随 x 增大而减小	当 $x<-\frac{b}{2a}$，y 随 x 增大而减小 当 $x>-\frac{b}{2a}$，y 随 x 增大而增大	当 $x<-\frac{b}{2a}$，y 随 x 增大而增大 当 $x>-\frac{b}{2a}$，y 随 x 增大而减小

常数(表达式)	>0	$=0$	<0
a	开口向上		开口向下
$a\cdot b$	对称轴在 y 轴的左侧	对称轴与 y 轴重合	对称轴在 y 轴的右侧
c	与 y 轴交于 x 轴的上方	过原点	与 y 轴交于 x 轴的下方
b^2-4ac	与 x 轴有两个交点	与 x 轴有一个交点	与 x 轴无交点

1．掌握二次函数的图象、性质及其应用；

2．根据已知条件，选用适当的形式，确定二次函数的解析式．

例 1 如图40-1，在同一坐标系中，一次函数的图象与坐标轴交于 $A(0,-3)$、$C(3,0)$两点，二次函数的图象与坐标轴交于 A、$B(-1,0)$、C 三点，且对称轴平行于 y 轴．求 (1) 一次函数的解析式；(2) 二次函数的解析式，及图象的顶点坐标；(3) 当自变量 x 为何值时，一次函数和二次函数的函数值都随 x 的值增大而增大；(4) 当自变量 x 为何值时，一次函数和二次函数的函数值的积小于零；(5) 求与已知抛物线的形状完成相同，开口方向相反，顶点在原点的抛物线的解析式．

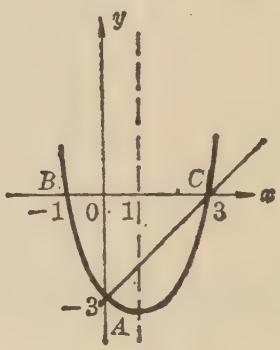


图 40-1

解 (1) 设一次函数的解析式为：

$$y=kx+b,$$

则有：$\begin{cases} 3k+b=0, \\ b=-3. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} k=1, \\ b=-3. \end{cases}$

函数解析式为：$y=x-3$．

(2) 设二次函数为 $y=ax^2+bx+c(a>0)$，因为图象过 $(-1,0),(3,0),(0,-3)$三点，所以有

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0, \\ c=-3 \end{cases} \quad \text{解得：} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-2. \\ c=-3 \end{cases}$$

$\therefore$ 二次函数为 $y=x^2-2x-3$．

$\frac{b}{2a}=1$，$\frac{4ac-b^2}{4a}=-4$，所以顶点为$(1,-4)$.

(3) ∵ $k=1>0$，∴当x在全体实数范围内，一次函数的函数值都随着x的增大而增大，又因为$a>0$，顶点为$(1,-4)$，所以在$x>1$的范围内二次函数的函数值随x的增大而增大.

(4) 通过图象可以看出，当$x<-1$时，一次函数为负，二次函数的函数值为正，所以它们的积小于零.

(5) 所求抛物线与已知抛物线形状完全相同，而方向相反，说明它们的二次项系数绝对值相同而符号相反，即所求抛物线的二次项系数为-1，又因为它通过原点，所以解析式为$y=-x^2$.

注意根据图象观察其函数的某些性质，如(4)可根据图中标出的抛物线与x轴交点的横坐标，观察求解.

例 2 根据下列条件，确定二次函数的解析式.

(1) 抛物线顶点坐标$(3,-1)$，在y轴截距为-4；

(2) 图象与x轴交于$(-2,0)$，$(1,0)$，且过$(2,8)$.

解 (1) 设所求的二次函数为$y=a(x+k)^2+h$.

∵ 顶点坐标为$(3,-1)$，　∴ $y=a(x-3)^2-1$.

∵ 抛物线在y轴截距为-4，即过$(0,-4)$，

∴ $a(0-3)^2-1=-4$，即$a=-\frac{1}{3}$，∴所求的解析式为

$$y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-1=-\frac{1}{3}x^2+2x-4.$$

(2) 设所求的二次函数为$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(其中x_1、x_2为方程$ax^2+bx+c=0$的两个根)

∵ 图象与x轴交于$(-2,0)$，$(1,0)$，即$x_1=-2$，

$x_2=1$，　∴ $y=a(x+2)(x-1)$.

∵ 图象过(2,8)，∴ $a(2+2)(2-1)=8$，即 $a=2$.

∴ 所求的解析式为 $y=2(x+2)(x-1)$，

即 $y=2x^2+2x-4$.

确定二次函数解析式的主要方法是待定系数法．一般有三个待定的常数.所以确定一个二次函数,需要有三个独立的条件,常见的表达形式有三种：

一般式：$y=ax^2+bx+c$；

配方式：$y=a(x+k)^2+h$；

两根式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

解题时要根据已知条件合理地选择二次函数解析式．如果已知抛物线经过三点，可用一般式如例 1(2)；已知顶点坐标或对称轴方程和最大或最小值时，则用配方式如 例2(1)；如果已知图象与 x 轴的交点的坐标,则选用两根式(亦称截距式) 如例 2(2)，注意最后结果要用一般式表达.

例 3 选择题：

已知 a 与 k 异号，且 $bc<0$，那么函数 $y=ax^2+c$ 与 $y=kx+b$ 在同一坐标系内正确的图象是(　　).

分析：先假定一个函数的图象是正确的，由此确定常数应具有的符号，再以此来检验另一个图象是否与此相符合.

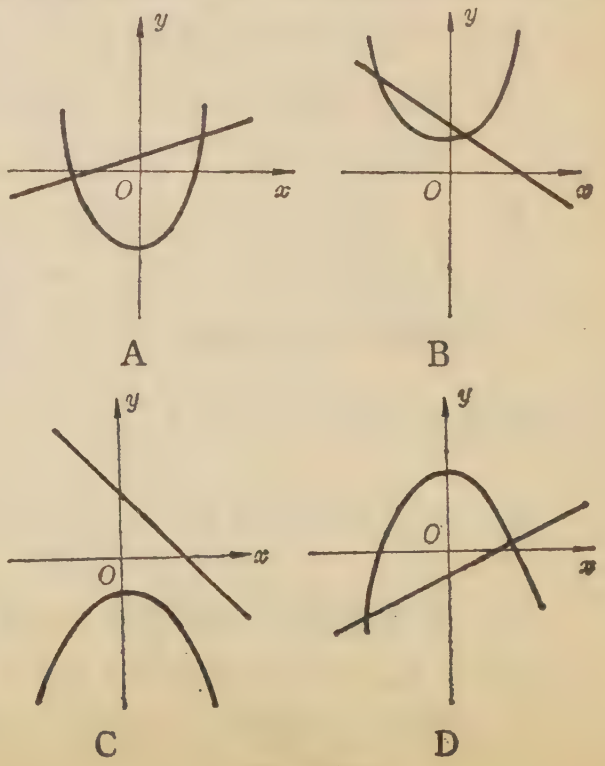


图 40-2

如本题中先假定A的直线位置是正确的，则应有$k>0$、$b>0$. ∵ a与k异号，$bc<0$，∴ $a<0$、$c<0$. 这时抛物线开口应向下，但A不符. 依次分析，B、C均应排除. D中$k>0$、$b<0$，而$a<0$、$c>0$符合条件，故选D.

练习四十

1. 填充：

(1) 一个与$y=x^2-x-6$具有相同的顶点，相同的开口方向而开口略大些的二次函数解析式为_____.

(2) 与$y=x^2-x-6$具有相同的形状，但其对称轴向右平移2个单位，然后顶点再沿对称轴向上平移一个单位的二次函数解析式为_____.

(3) 已知函数$y=x^2+px+q$，当$x=4$时，有最小值-3，则这二次函数的解析式为_____.

(4) 如图40-3是二次函数$y=ax^2+bx+c$的大致图象，试填写下列符号：a的符号____；b的符号____；c的符号_____；b^2-4ac的符号_____.

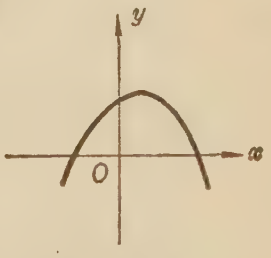


图 40-3

2. 选择题：

(1) 函数$y=ax^2+bx+c$，如果$ac<0$，则其图象与x轴的位置关系是(　　).

A 相切　B 相交　C 相离　D 不确定

(2) 在半径为4cm的圆面上，从中挖去一个半径为x的圆面，剩下一个圆环的面积为$y$cm²，则y与x的函数关系式为(　　).

A $y=\pi x^2-4$　　B $y=\pi(2-x)^2$

C $y=-\pi(x^2+4)$　　D $y=-\pi x^2+4^2\pi$

(3) 已知抛物线 $y=x^2-8x+c$ 的顶点在 x 轴上，则 c 的值为(　　).

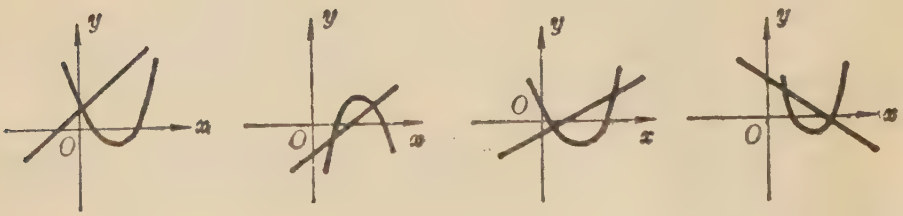
A 16　　B -4　　C 4　　D 8

(4) 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$的顶点在 x 轴上方的条件是(　　).

A $b^2-4ac<0$　　B $b^2-4ac>0$

C $b^2-4ac\leqslant 0$　　D $b^2-4ac\geqslant 0$

(5) 当 $b<0$ 时，函数 $y=ax+b$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐标系内的图象是(　　).



A　　B　　C　　D

图 40-4

3. 写出一个二次函数，使它满足条件，当 $x>6$ 或 $x<2$ 时，$y>0$.

4. 写出一个二次函数，使它满足条件，当 $x>5$ 时，函数值递增，而 $x<5$ 时，函数值递减.

5. 已知 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过(1，-3)，(0，-8)两点，并且它与 x 轴的两个交点间的距离为 2，求 a、b、c 的值.

第41天　二次函数（二）

复习要求：

会求二次函数的最大值和最小值，并能用求二次函数最大值或最小值的方法，解决某些实际问题.

例1　求下列函数的最大值或最小值：

（1）$y=3x^2-10x+9$；　（2）$y=2-\sqrt{3x^2-10x+9}$.

解　（1）$y=3(x^2-\frac{10}{3}x+3)=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 当 $x=\frac{5}{3}$ 时，$y_{\text{最小值}}=\frac{2}{3}$；

（2）$y=2-\sqrt{3x^2-10x+9}$

$$=2-\sqrt{3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{3}},$$

$\therefore$ 当 $x=\frac{5}{3}$ 时，$y_{\text{最大值}}=2-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

想一想：$y=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-10x+9}}$ 的最大值或最小值是什么？

例2　三角形两边之和为4厘米，其夹角为60°，求这三角形面积的最大值和周长的最小值.

解　设三角形 ABC 的面积为 S，$A=60°$，$b+c=4$，

则　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(4-c)\cdot c\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{4}(c^2-4c)$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{4}(c-2)^2+\sqrt{3},$$

所以三角形面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 平方厘米.

设三角形周长为 l，那末 $l=a+b+c=4+a$.

$\because\ a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{b^2+c^2-bc}$

$=\sqrt{(b+c)^2-3bc}=\sqrt{16-3(4-c)\cdot c}$

$=\sqrt{3(c-2)^2+4}$，

$\therefore$ a 的最小值为2，$\therefore$ l 的最小值为 6.

解此类题关键要根据条件找出变量之间的关系式，然后列出二次函数解析式，最后根据要求求出最小值或最大值.

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°$，$AB=4$，$AC=6$，P 为 AC 上任意一点，过 P 作 $PD\parallel AB$，交 BC 于 D，设 $AP=x$，

(1) 求 x 与 $\triangle BPD$ 面积的函数关系的解析式；

(2) 当 x 为何值时 $\triangle BPD$ 的面积有最大值或最小值？并求其最大值或最小值；

(3) 写出 x 的取值范围.

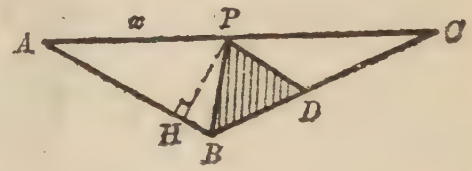


图 41-1

解 (1) 由 P 点作 $PH\perp AB$，则由 $\angle A=30°$，

在 $\triangle APH$ 中，$PH=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}x$，

又 $PD\parallel AB$，$\therefore$ $\frac{PD}{AB}=\frac{PC}{AC}$，$\therefore$ $PD=\frac{AB\cdot PC}{AC}$. $\because$ $AC=6$，$PC=6-x$，$AB=4$，

$\therefore$ $PD=\frac{4(6-x)}{6}=\frac{2}{3}(6-x)$.

又 $S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}PD\cdot PH=\frac{1}{2}\times\frac{2(6-x)}{3}\cdot\frac{x}{2}=\frac{6x-x^2}{6}$，

$\therefore$ $S_{\triangle BPD}=-\frac{1}{6}x^2+x$ 为 x 与 $\triangle BPD$ 面积的函数关系的解析式.

(2) $S_{\triangle BPD}=-\frac{1}{6}x^2+x$，$a=-\frac{1}{6}<0$，$\therefore$ $S_{\triangle BPD}$ 有最

大值，即当 $x=3$ 时，$S_{\triangle PBD}$最大值为 $\frac{3}{2}$.

(3) x 的取值范围，由 $AC=6$，P 为 AC 上任意一点，

$\therefore\ 0\leqslant x\leqslant 6$.

练习四十一

1. 选择题：

(1) $\sqrt{x^2-124x+4100}$ 的最小值为(　　).

A -16　　B 256　　C 16　　D -256

(2) 一个二次函数，当 $x=2$ 时，$y=-2$；当 $x=3$ 时，$y=4$；当 $x=-2$ 时，$y=14$，那么这个二次函数是(　　).

A 当 $x=1$ 时，y 有最大值为 4

B 当 $x=1$时，y 有最小值为 -4

C 当 $x=-1$时，y 有最大值为 -4

D 当 $x=-1$ 时，y 有最小值为 4

2. 半径为 1 的半圆外接于等腰梯形，其下底是半圆直径，当腰长等于多少时，周长有最大值？

3. 有 10 厘米长线段，分成两段，在一段上，以其为一边作一正三角形，在另一段上，以其为一边作一正方形. 问此两图形的面积之和最小为多少？

第 42 天　　练习四十二

1. 填空：

(1) 已知 $A(3,-5)$，$AB=13$，且 B 点与 y 轴的距离是 2，则 B 点坐标为_____.

(2) 函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{4x^2-1}$ 的自变量 x 取值范围是____.

(3) 等腰梯形的周长为 24cm，上底与腰长均为 x cm，其底边长 $y=$_____(cm)，其中 x 的取值范围_____.

(4) 当 $m=$____时，$y=(2m^2-7m-9)x^{m^2-9m+19}$ 是正比例函数，且它的图象在二、四象限内.

(5) 设 y 是 x^2 的正比例函数，z 是 x^2 的反比例函数，并且当 $x=2$ 时，$y+z=340$，当 $x=1$ 时，$z-y=1275$.

求 z 和 y 之间的函数解析式.

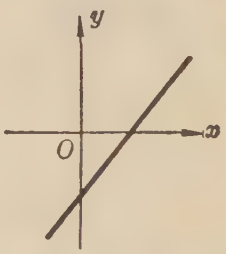


图 42-1

(6) 一次函数 $y=kx+b$ 的图象如图 42-1，则 $\sqrt[3]{b}$ 与 k^3 的大小关系是_____；当 $b=$_____时，$y=kx+b$ 是正比例函数.

(7) 把函数 $y=\frac{1}{2}(x-3)^2$ 的图象向上平移 2 个单位，得到函数 $y=$_____的图象. 此时函数的最小值为_____.

(8) 如图 42-2 是函数 $y=x^2-6x+5$ 的图象. 在图上填

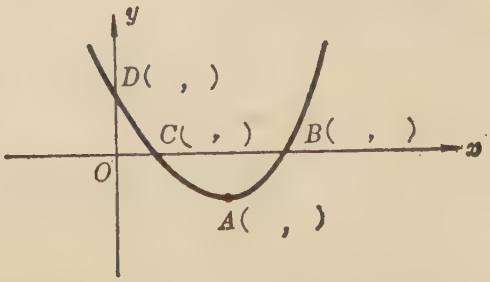


图 42-2

上：① 图象顶点 A 的坐标，

② 图象与 y 轴交点 D 的坐标，

③ 图象与 x 轴交点 C、B 的坐标，

④ 对称轴方程为____，当 $x=$ ____时，函数 y 有最小值.

2. 选择题：

(1) 如果函数 $y=ax-2$ 与函数 $y=bx+3$ 的图象交于 x 轴上一点，则 $\frac{b}{a}$ 的值为(　　).

A $\frac{3}{2}$　　B $-\frac{3}{2}$　　C $\frac{2}{3}$　　D $-\frac{2}{3}$

(2) y 是 x 的反比例函数，当 x 增加 20% 时，y 将(　　).

A 减少 20%　　B 减少 $16\frac{2}{3}$%

C 增加 20%　　D 减少 80%　　E 以上答案都不对

(3) 如果 $ab<0$，$bc>0$，那么直线 $ax+by+c=0$ 不通过(　　).

A 第一象限　B 第二象限　C 第三象限　D 第四象限

(4) 若函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 的图象经过原点和第二、三、四象限，则 a、b、c 应满足条件是(　　).

A $a<0$，$b>0$，$c<0$　　B $a>0$，$b<0$，$c=0$

C $a<0$，$b<0$，$c=0$　　D $a<0$，$b>0$，$c=0$

(5) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点是 $M(2,-4)$ 且抛物线经过点 $A(0,0)$，$B(4,0)$，则 a、b、c 的值是(　　).

A $a=1$，$b=4$，$c=0$　　B $a=1$，$b=-4$，$c=8$

C $a=-1$，$b=-4$，$c=0$　　D $a=1$，$b=-4$，$c=0$

3. 某市体育馆原有长 100 米，宽 60 米的矩形游泳池，准备扩建成周长为 600 米的较大矩形游泳池，假设长增加 x 米，宽增加 y 米，扩建后面积为 s 米^2.

(1) 将 y 表示成 x 的函数，

(2) 将 s 表示成 x 的函数.

4. 在平面直角坐标系内直线 $y=x+b$ 和 $y=kx+5$ 都经过点 $A(4,2)$.

(1) 求 k、b 的值,且画出这两条直线.

(2) 求这两条直线与 y 轴围成的三角形面积.

5. 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2+kx+k$.

(1) 求 k 的取值范围,使这个二次函数的图象与 x 轴有两个交点;

(2) 当这个二次函数的图象与 x 轴的两个交点横坐标的平方和等于 3 时,求二次函数的解析表达式,并在直角坐标系中画出它的图象.

七、统计初步

本单元的主要内容及其相互关系见下页表.

第 43 天　统计初步

复习要求:

1. 理解总体、样本、个体、样本容量、平均数、方差等概念;

2. 根据已知条件正确计算平均数;

3. 学会用两种方法计算方差、标准差及根据方差估计样本的波动大小.

例 1　为了考查一个养鸡场鸡的生长情况,从中抽取 5 个,称出它们的重量如下:3.0, 3.4, 3.1, 3.3, 3.2(单位:

总体：要考察的对象全体

个体：总体中每一个考察对象

总体（样本）

样本：从总体中取出的一部分个体叫做总体的一个样本

样本容量：样本中个体的数目

统计方法的特点：根据样本的特性去估计总体的相应特性

平均数

样本平均数 $\overline{x}$

用 $\overline{x}$ 去估计总体平均数

刻划总体的平均大小的特征数

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

当样本数据较大时用 $\overline{x}=\overline{x'}+a$

其中 $\overline{x'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i'$，$x_i'=x_i-a$

（a 是接近 $\overline{x}$ 的事先选定的常数）

当样本数据 x_1 x_2……x_k 分别出现 f_1f_2……f_k 次时

$f_1+f_2+\cdots\cdots f_k=n$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i f_i$$

$$=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots\cdots+x_kf_k}{n}$$

（f_i 叫做权，$\overline{x}$ 叫做加权平均数）

方差

样本方差 S^2

用 S^2 去估计总体方差

刻划总体的波动大小的特征数

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

样本标准差 $S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$

方差的简化计算

$$S^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)$$

$$S^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x'}^2\right)$$

其中 $x_i'=x_i-a$

（a 是接近 $\overline{x}$ 的事先选定的常数）

频率分布

用样本的频率分布去估计总体分布（总体分布反映了总体中各部分个体在总体中所占的比例大小）

千克),在这个问题中样本是指_____,样本容量是_____,样本平均数 $\bar{x}=$_____千克.

解法一 根据题意,在这个问题中,样本是指抽取的 5 只鸡的重量,样本容量是 5 ,样本平均数

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(3.0+3.4+3.1+3.3+3.2)=3.2.$$

解法二 将数 3.0, 3.4, 3.1, 3.3, 3.2 减去 3 得 0 , 0·4, 0.1, 0.3,0.2,

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{1}{5}(0+0.4+0.3+0.1+0.2)=0.2,$$

即 $\bar{x}=0.2+3=3.2$.

此题使用第二种解法较简便.

例 2 甲、乙两班进行篮球比赛,每班派 10 名同学参加,每人投 10 次,每人投中次数如下:

甲班:7, 8, 6, 8, 6, 5, 4, 9, 10, 7.

乙班:7, 7, 6, 8, 6, 7, 8, 7, 5, 9.

计算以上两个样本的方差,问哪个班的投篮的情况比较稳定?

解 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}(7+8+6+8+6+5+4+9+10+7)=7,$

$$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}(7+7+6+8+6+7+8+7+5+9)=7,$$

$$S^2_{甲}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x}_{甲})^2$$

$$=\frac{1}{10}[0^2\times 2+1^2\times 2+(-1)^2\times 2+(-2)^2+(-3)^2+2^2+3^2]$$

$$=\frac{1}{10}\times(2+2+4+9+4+9)=3,$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x}_{乙})$$

$$=\frac{1}{10}[0^2\times 4+(-1)^2\times 2+1^2\times 2+(-2)^2+2^2]$$

$$=\frac{1}{10}(2+2+4+4)=1.2,$$

$\because S_{甲}^2>S_{乙}^2$,

$\therefore$ 乙班投篮情况比较稳定.

想一想:还有其它计算方法吗?

例 3 样本 10, 10, 1, 9, 7, 9.9, 10.3 的标准差是_____.

解 $\because s^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{7}x_i^2-n\bar{x}^2\right)$,

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}x_i=\frac{1}{7}(10+10+1+9+7+9.9+10.3)$$

$$=8.2\approx 8,$$

$$\therefore S^2=\frac{1}{7}[10^2+10^2+1^2+9^2+7^2+9.9^2+10.3^2$$

$$-7\times 8^2]=\frac{1}{7}\times 87.91=12.66.$$

样本标准差为 $s=\sqrt{12.66}=3.55$.

注意一般样本平均数保留到个位, 而样本方差和标准差可保留两个小数,如果题中有要求,应按要求保留.

练习四十三

1. 选择题:

(1) 为了考查某市高中招生数学考试的情况, 评卷组从中抽查了 400 名考生的数学试卷, 在这个问题中, 这 400 名考生的数学试卷叫(　　).

A 总体　　B 个体　　C 样本　　D 样本容量

(2) 甲、乙两个样本，甲的样本方差是0.105，乙的样本方差是0.055，那么样本甲和样本乙的波动大小是(　　).

A 甲的波动比乙的波动大

B 乙的波动比甲的波动大

C 甲、乙的波动大小一样

D 甲、乙的波动大小无法比较

(3) 为了考查某部初三年级12500名学生的数学统一考试情况，从中抽出4本密封的考卷，每本30份，那么样本容量是(　　).

A 4　　B 120名考生成绩　　C 120　　D 12500

(4) 考查两组数 x_1，$x_2\cdots x_n$；y_1，$y_2\cdots y_n$，它们的平均数分别为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，那么新的一组数：$x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots x_n+y_n$ 的平均数是(　　).

A $\frac{1}{2}(\bar{x}+\bar{y})$　　B $\bar{x}+\bar{y}$　　C $\frac{1}{n}(\bar{x}+\bar{y})$

D 以上三种答案都不对

2. 填空：

(1) 为了考查某班学生身高情况，从中抽出30名学生的身高，在这个问题中总体指_____，个体是指_____.

(2) 已知一个样本：8.8，9，9.2，8.6，9.5，8.9，则这个样本的平均数是_____.

(3) 样本是：1，2，3，4，5，则方差 $S^2=$_____.

(4) 某次考试5名学生 A、B、C、D、E 平均得分62分，若学生 A 除外，其余学生的平均得分是60分，那么学生 A 得分是_____.

(5) 样本10，10.1，9.7，9.9，10.3的标准差是_____.

(6) 两名同学在同样条件下练习射击，每人打五枪，所得环数分别是：

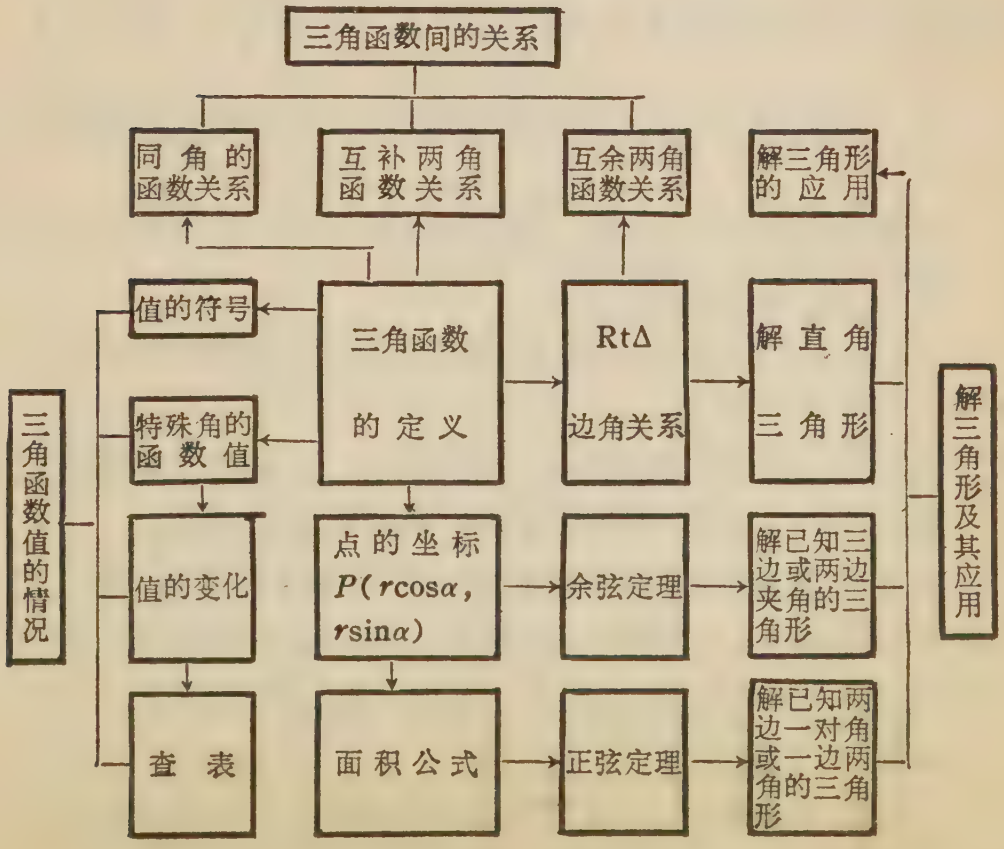
甲：6，8，9，9，8；乙：10，7，7，7，9，其中射击技术比较稳定的是_____.

(7) 若1，2，3，x的平均数为5，且1，2，3，x，y的平均数为6，那么y的值是_____，样本1，2，3，x，y的方差是____.

八、解三角形

本单元分8天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见下表：



第44天　三角函数

复习要求：

1．理解三角函数的定义；

2．掌握三角函数值的符号、变化、求法等，特别要熟记30°，45°，60°，90°角的三角函数值，并熟练地用于解有关问题．

例1　当m为何值时，点$(3,m)$和点$(2,m-1)$在以原点为顶点，x轴正方向为始边的同一角的终边上．

解　据三角函数的定义，一个角的任一三角函数值与其终边上所取点的位置无关，故由$\operatorname{tg}\alpha=\frac{m}{3}=\frac{m-1}{2}$，得$m=3$．

∴当$m=3$时，点$(3,m)$和点$(2,m-1)$在同一角的终边上．

本题若通过$\sin\alpha$、$\cos\alpha$来解均较繁，同学们不妨一试．

例2　解下列各题：

(1) 已知角A是$\triangle ABC$的内角，试判断$\sin A$、$\cos A$、$\operatorname{tg}A$、$\operatorname{ctg}A$的符号；

(2) 已知$\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta>0$，试确定$\alpha$、$\beta$在什么范围内．

解　(1) ∵A为三角形内角，∴$0°<A<180°$．

当A为锐角时，$\sin A$、$\cos A$、$\operatorname{tg}A$、$\operatorname{ctg}A$均为正；当A为直角时，$\sin A=1$，$\cos A$、$\operatorname{ctg}A$均为零，$\operatorname{tg}A$无意义；当A为钝角时，$\sin A$为正，$\cos A$、$\operatorname{tg}A$、$\operatorname{ctg}A$均为负．

(2) ∵ $\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta>0$，

∴ $\cos\alpha>0$，$\operatorname{ctg}\beta>0$，或$\cos\alpha<0$，$\operatorname{ctg}\beta<0$，

∴ α、β都是锐角，或 α、β 都是钝角.

当 $0°<\alpha<180°$ 时，$\sin\alpha$ 总取正值，而 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 可取正值也可取负值. 反之由三角函数值的正负，亦可判定角是锐角还是钝角，或两者皆有可能.

例 3 已知角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正方向，若

(1) 终边经过点 $P(2\sqrt{mn},m-n)(m>n>0)$，求 α 的四个三角函数值；

(2) 终边经过点 $P(m,8)$，且 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，求 m 的值.

解 (1) ∵ $x=2\sqrt{m\cdot n}$，$y=m-n$，

∴ $r=\sqrt{x^2+y^2}=m+n$，

$$\therefore \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{m-n}{m+n},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{mn}}{m+n},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{(m-n)\sqrt{mn}}{2mn},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{2\sqrt{mn}}{m-n}.$$

(2) ∵ $P(m,8)$，∴ $x=m$，$y=8$，$r=\sqrt{m^2+8^2}$.

∵ $\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+64}}=-\frac{3}{5}$，

∴ $m^2=36$，$m=\pm6$，

∵ $\cos\alpha=-\frac{3}{5}<0$，可知 α 是钝角，将 $m=6$ 舍去，

∴ $m=-6$.

以上例题说明角 α 终边上任一点的横坐标 x、纵坐标 y，

这点到原点的距离 r 和 α 的三角函数值，这四个量中，若已知其中的任意两个量，即可求得另两个量．但必须注意对所求结果的取舍．

例 4 计算

$$\sin45^\circ\cdot\cos45^\circ+\frac{\cos30^\circ\cdot\operatorname{ctg}45^\circ}{\sin90^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ}+3\operatorname{ctg}^2 60^\circ+\frac{\cos90^\circ}{\sin60^\circ}$$

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}{1\cdot\sqrt{3}}+3\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\dfrac{0}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=2.$$

例 5 比较三角函数值的大小 $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$

(1) $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\alpha$；　(2) $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$．

解 (1) ∵ $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$，而 x、y 均 >0，且 $r>x$，

∴ $\dfrac{y}{r}<\dfrac{y}{x}$，即 $\sin\alpha<\operatorname{tg}\alpha$．

(2) 当 $0^\circ<\alpha<45^\circ$ 时，

$$\sin\alpha<\sin45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\alpha>\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

∴ $\sin\alpha<\cos\alpha$．

当 $\alpha=45^\circ$ 时，$\sin\alpha=\cos\alpha$．

当 $45^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，$\sin\alpha>\cos\alpha$．

由本例可知：

① 当 α 为锐角时，$\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$ 的值随着 α 的增大而增大，而 $\cos\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值随着 α 的增大而减小．这个规律从三角函数表或特殊角的三角函数值不难看出，也可据三角函数的定义来证实．

② 比较三角函数值的大小的主要根据是上述的三角函数的增减性，特殊角的三角函数值和三角函数的定义．解题时要恰当选用这些“根据”．

③ 在(1)、(2)中，我们是用一个特殊的三角函数值作为“参照”来比较两个三角函数值的大小的，这是一种常用技巧，应注意应用．

练习四十四

1．填空题：

(1) 若 $\sin\alpha>0$，则 $\operatorname{tg}\alpha$ 的符号是_____．

(2) 已知角 α 的终边经过点 $P(-2,\sqrt{5})$，点 $Q(6\sqrt{5},10)$ 在角 β 的终边上，则 $\sin\alpha$ 与 $\operatorname{tg}\beta$ 的大小关系是_____．

(3) $2\cos\alpha+\sqrt{3}=0$，$\alpha=$____；

$(3\operatorname{tg}\beta+\sqrt{3})\cdot(\operatorname{tg}\beta-1)=0$，$\beta=$____．

(4) 已知 $\alpha=30°$，$|OP|=10$，则 P 点的坐标为(____)．

2．选择题：

(1) 如果 α 为锐角，那么 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为(　　)．

A 小于 1　　B 等于 1

C 大于 1　　D 不同于以上答案

(2) 已知 $\sin\alpha_1=0.4695$，$\cos\alpha_2=0.8870$，$\operatorname{tg}\alpha_3=0.5430$，$\operatorname{ctg}\alpha_4=1.962$，查表求出 α_1、α_2、α_3、α_4，它们的大小顺序是(　　)．

A $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$　　B $\alpha_4<\alpha_2<\alpha_1<\alpha_3$

C $\alpha_4<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$　　D $\alpha_4<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_1$

(3) 不论 α 是锐角还是钝角，角 α 的三角函数始终取相同符号的是(　　)．

A $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$　　B $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$

C $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$　　D $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$

(4) 若 $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}60°(0°<\alpha<180°)$，则角 α 的取值范围是(　　).

A $0°<\alpha<60°$　　B $0°<\alpha<60°$，或 $60°<\alpha<180°$

C $90°<\alpha<180°$　　D $0°<\alpha<60°$，或 $90°<\alpha<180°$

3. 解下列各题：

(1) 计算 $\operatorname{tg}^2 30°+2\sin 60°\cos 45°+\operatorname{ctg}45°-\sin^2 30°$.

(2) 化简 $\sqrt{(\cos 30°-1)^2}+|1-\operatorname{tg}60°|$.

(3) 比较大小：

① $\sin 64°8'$ 和 $\cos 64°8'$；

② $\operatorname{tg}54°3'$ 和 $\operatorname{ctg}54°3'$.

第 45 天　三角函数间的关系

复习要求：

1. 熟悉同角、互余两角、互补两角的三角函数间的关系式及其推导过程；

2. 能应用上述关系式解有关求值、化简和简单的证明问题等. 特别要能熟练地将钝角三角函数化为锐角三角函数.

例 1　解下列各题：

(1) 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，求 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值.

(2) 已知 $\sin\alpha+\cos(90°-\alpha)=1$，求 α.

解　(1) $\because \sin\alpha=\frac{4}{5}>0$,

$\therefore \alpha$ 为锐角或钝角.

据同角三角函数关系，得

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\frac{3}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \pm\frac{3}{4}.$$

(2) 据互余两角三角函数关系式，得

$$\sin\alpha + \sin\alpha = 1, \text{ 即 } \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

$\therefore\ \alpha = 30°$，或 $\alpha = 150°$.

已知一个角的三角函数值，求其他三角函数的值，也可根据三角函数的定义来解. 如本题的(1)可用以下方法解：

设：角 α 终边上任意一点的坐标为 (x,y).

$\because\ \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \therefore\ y = \frac{4}{5}r, x = \pm\sqrt{r^2-y^2} = \pm\frac{3}{5}r.$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{x}{r} = \pm\frac{3}{5},\ \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{4}{3},\ \operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{3}{4}.$

由本例可知：已知 $\sin\alpha$ 的值，求 α $(0°<\alpha<180°)$，α 有两解，它们互为补角(当 $\sin\alpha = 1$ 时，$\alpha = 90°$)，再求其他三角函数的值亦有两解，它们互为相反数. 如果已知 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值，求 α，α 只有一解，此时再求其他三角函数的值，亦只有一解. 解题时应注意解的个数.

例 2 计算 $4\operatorname{tg}^2135° - \frac{1}{\sin150°} + \cos^2120° + \frac{\sin120°}{\operatorname{ctg}150°}$.

解 原式 $= 4(-\operatorname{tg}45°)^2 - \frac{1}{\sin30°} + (-\cos60°)^2$

$$+\frac{\sin60°}{-\operatorname{ctg}30°} = 4-2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}.$$

例 3 不查表比较 $\frac{1}{\cos130^\circ}$ 与 $\frac{1}{\cos140^\circ}$ 的大小.

解 $$\frac{1}{\cos130^\circ}-\frac{1}{\cos140^\circ}=\frac{1}{-\cos50^\circ}-\frac{1}{-\cos40^\circ}$$
$$=\frac{\cos50^\circ-\cos40^\circ}{\cos40^\circ\cdot\cos50^\circ}.$$

$\because$ $\cos50^\circ>0$, $\cos40^\circ>0$, 且 $\cos50^\circ<\cos40^\circ$,

$\therefore$ $\frac{\cos50^\circ-\cos40^\circ}{\cos40^\circ\cdot\cos50^\circ}<0$, 即 $\frac{1}{\cos130^\circ}<\frac{1}{\cos140^\circ}$.

"求差法"是比较大小的常用方法之一. 一般地, 比较 a 与 b 的大小: 若 $a-b>0$, 则 $a>b$; 若 $a-b=0$, 则 $a=b$; 若 $a-b<0$, 则 $a<b$.

* **例 4** 化简 $1-\frac{1-\sin^2(90^\circ-\alpha)}{\mathrm{tg}^2(180^\circ-\alpha)}$

解 原式 $=1-\frac{1-\cos^2\alpha}{(-\mathrm{tg}\alpha)^2}=1-\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

将 1 化成 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 是常用的技巧. 此外还可将 1 化成 $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha$ 等. 其中 α 根据题意而定, 解题时要注意灵活应用.

练习四十五

1. 填空:

(1) 填上适当的角或三角函数符号, 使下列等式成立: $\sin(90^\circ-x)=$____x; $\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)=\mathrm{ctg}$____; $\cos(71^\circ+\alpha)=\sin$____; $\mathrm{ctg}80^\circ=$_____10°.

(2) 设下列各式中的 α、β 都是锐角, 若 $\sin\alpha=0.2588$, 则 $\sin(180^\circ-\alpha)=$____; 若 $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, 则 $\cos(180^\circ-\alpha)=$

____；若 $\operatorname{tg}\beta=2$，则 $\operatorname{tg}(180^\circ-\beta)=$____；$\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}(180^\circ-\beta)=$____。

(3) 如果对于 $0^\circ\sim180^\circ$ 的角 α、β，$\sin\alpha=\sin\beta$，α 和 β 的关系是____；如果 $\sin\alpha=\cos30^\circ$，则 $\alpha=$____；如果 $\cos\alpha=\sin30^\circ$，则 $\alpha=$____。

(4) 下列各式的符号是：$\cos150^\circ+\sin40^\circ$____；$\sin28^\circ-\operatorname{tg}123^\circ$____；$\operatorname{tg}130^\circ-\operatorname{ctg}131^\circ$____；$\lg\sin155^\circ$ 与 $\lg\cos55^\circ$ 的大小是_____。

2. 选择题：

(1) 若 $\angle B$ 是 $\triangle ABC$ 的内角，且 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\cos\frac{B}{2}$ 等于(　　)。

A $\frac{1}{2}$　B $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) 如果 $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}20^\circ=1$，那么锐角 α 的度数等于(　　)。

A 20°　B $\left(\frac{1}{20}\right)^\circ$　C 70°　D $\left(\frac{1}{70}\right)^\circ$

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 是锐角，则下列四个等式 ① $\sqrt{\cos^2A}=\cos A$；② $\sin(90^\circ-C)+\cos(180^\circ-C)=0$；③ $\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{ctg}B<0$；④ $\sin A-\cos B>0$ 正确的个数是(　　)。

A 1个　B 2个　C 3个　D 4个

(4) 计算 $\sqrt{(\sin32^\circ-1)^2}+|\cos122^\circ-1|$ 的结果是(　　)。

A $2\sin32^\circ$　B 2　C 0　D $2-2\sin32^\circ$

3. 解下列各题：

(1) 计算：① $\sin^2143^\circ+2\operatorname{ctg}147^\circ\cdot\operatorname{ctg}57^\circ+\sin^2127^\circ$；

② $\operatorname{ctg}120°\cdot\sqrt{1-\cos^2120°}+\sin150°\cdot\operatorname{tg}150°\cdot\operatorname{ctg}150°$.

* (2) 化简 $\cos^2(50°+A)+\sin^2(130°-A)$
$-\operatorname{tg}(30°-A)\cdot\operatorname{tg}(60°+A)$.

* (3) 已知 $\sin A+\cos A=m$，求证 $\sin A$ 和 $\cos A$ 是方程 $2x^2-2mx+m^2-1=0$ 的根.

第 46 天　解直角三角形

复习要求：

熟记直角三角形中各元素间的关系，并能熟练地运用它们解直角三角形.

例 1　在 $Rt\triangle ABC$ 中，已知 $a=40$，$\angle A=40°$，求 b、c（结果保留三个有效数字）.

解　$\because \sin A=\frac{a}{c}$，　$\therefore c=\frac{a}{\sin A}=\frac{40}{0.6428}\approx62.2$.

又 $\because \operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}$，$\therefore b=a\cdot\operatorname{ctg}A=40\times1.198\approx47.9$.

b 也可用正切 $\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$ 求得，但要做除法，计算就较繁了.

b 还可根据求得的中间数据 $c=62.2$，用勾股定理

$$b=\sqrt{c^2-a^2}\text{ 或 }\cos A=\frac{b}{c}\left(\text{或 }\sin B=\frac{b}{c}\right)$$

来求. 如 $b=c\cdot\cos A=62.2\times0.7660\approx47.6$. 显而易见这种解法的误差比用原始数据解得的要大.

解直角三角形的方法，可概括为“有弦(斜边)用弦(正弦、余弦)、无弦用切，宁乘毋除，取原避中”这几句话. 其含意

是：当已知或求解中有斜边时，就用正弦或余弦；无斜边时，就用正切或余切；当所求元素既可用乘法又可用除法时，则用乘法，不用除法；既可由已知数据又可用中间数据求得时，则取原始数据，避用中间数据.

例 2 (1) 如图 46－1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$b=8\sqrt{5}$，$\angle A$ 的平分线 $AD=\frac{16\sqrt{15}}{3}$. 解这个三角形，并求它的外接圆半径.

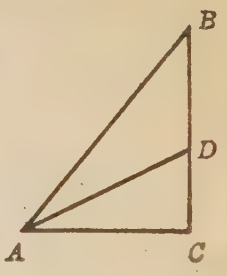


图 46-1

(2) 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中($C=90°$)，外接圆半径 $R=5$，内切圆半径 $r=2$，求 $\angle A$、$\angle B$ 的度数.

解 (1) 在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\angle DAC=30°$，$\angle BAC=60°$，$\angle B=30°$.

$\therefore\ a=b\cdot\operatorname{tg}\angle BAC=8\sqrt{15}$，$c=\frac{b}{\cos\angle BAC}=16\sqrt{5}$.

$\because\ R=\frac{c}{2}$，$\therefore\ R=8\sqrt{5}$.

(2) $\because\ R=\frac{c}{2}$，$r=\frac{a+b-c}{2}$，

$$\therefore\ \begin{cases} a+b-10=4 \\ a^2+b^2=10^2 \end{cases}.$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} a=6 \\ b=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=8 \\ b=6 \end{cases}$.

$\therefore\ \operatorname{tg}A=\frac{3}{4}$，或 $\operatorname{tg}A=\frac{4}{3}$.

$\therefore\ A=36°52'$，$B=53°8'$ 或 $A=53°8'$，$B=36°52'$.

由本例可知，解含有非基本元素的三角形（我们把三角形中的边和角称为基本元素，而把中线、高、角平分线、外接圆半径、内切圆半径以及周长、面积等，均称为非基本元素），通常是将非基本元素转化为基本元素（如(1)将 AD 转化为 $\angle BAC$），或转化为元素间的关系式（如(2)），再通过解方程组来解.

在直角三角形中，除了边角间的关系外，还有面积 $S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}ab$，$R=\frac{c}{2}$，$r=\frac{a+b-c}{2}$，以及射影定理中的相关线段等. 这些关系在解题时常有应用.

例 3 已知在 $Rt\triangle ABC$ 中（$C=90°$），$A=60°$ $a+b=2$，求 c 边的长.

解法一 由 $A=60°$，得 $B=30°$，$c=2b$，

$$\therefore \begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=(2b)^2 \end{cases}.$$

解这个方程组，得 $b=\sqrt{3}-1$，$c=2\sqrt{3}-2$.

解法二 $\because A=60°$，$\therefore \operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\sqrt{3}$，即 $a=\sqrt{3}b$，

解这方程组 $\begin{cases} a+b=2 \\ a=\sqrt{3}b \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=3-\sqrt{3} \\ b=\sqrt{3}-1 \end{cases}$.

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}-2$.

解法三 同上解得 $b=\sqrt{3}-1$，

$$\therefore \quad c=\frac{b}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{3}-2.$$

本例是已知一定条件解三角形问题. 其解法通常是根据已知条件列出方程（组）来解.

例 4 在 $Rt\triangle ABC$ 中 ($C=90°$)，求证

$$a^3\cos A+b^3\cos B=abc.$$

证法一 左边 $=a^3\cdot\frac{b}{c}+b^3\cdot\frac{a}{c}=ab\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)$

$$=ab\cdot\frac{a^2+b^2}{c}=ab\cdot\frac{c^2}{c}=abc=\text{右边}.$$

证法二 右边 $=ab\cdot\frac{c^2}{c}=ab\cdot\frac{a^2+b^2}{c}=a^3\cdot\frac{b}{c}+b^3\cdot\frac{a}{c}$

$$=a^3\cos A+b^3\cos B=\text{左边}.$$

从本例可知，证明边角等式，可把三角函数化为边，也可把边化为三角函数式．应视具体情况而定．本题以前者解法为好．

关于解直角三角形的几种常见类型及其解法，可列成下表：

解直角三角形	已知基本元素	一边一锐角 二边	有弦用弦，无弦用切， 宁乘毋除，取原避中
	已知非基本元素	基本、非基本元素混合 全部非基本元素	将非基本元素转化为基本元素或解方程(组)
	已知一定条件	元素、条件混合 全部条件	根据条件列出并解方程(组)
	证明边角关系	把三角函数化为边或把边化为三角函数	

练习四十六

1．填空题：

(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，斜边 AB 是直角边 AC 的 3 倍，则 $\sin A=$____；$\cos A=$____；$\operatorname{tg}A=$____；$\operatorname{ctg}A=$____．

(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$c=8$，$a=6$，则最小角的正切为____；若 $\sin A=\cos(90°-B)$，则 $\angle A$ 的度数是

_____.

(3) 查正弦对数表得 $\lg\sin 71°22' =$ _____；已知 $\lg\cos\alpha = \bar{1}.3640$，查表得 $\alpha =$ ____；当 $45° < \alpha < 90°$ 时，$\lg\operatorname{tg}\alpha$ 的值一定是____数；$\lg\operatorname{ctg}\alpha$ 的值一定是____数.

(4) 已知 $Rt\triangle ABC$ 的两直角边 $a=10$，$b=7$，查表求得 $c =$ ____；$\angle B =$ ____.

2. 选择题：

(1) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，各边的长度都扩大两倍，那么锐角 A 的三角函数值(　　).

A 都扩大两倍　　B 都缩小到一半

C 没有变化　　D 不能确定

(2) $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，如果 $\sin A = \frac{2}{3}$，那么 $\operatorname{tg}B$ 等于(　　).

A $\frac{3}{5}$　　B $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C $\frac{2}{\sqrt{5}}$　　D $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，则 $\cos A\cdot\operatorname{ctg}B$ 的值是(　　).

A $\frac{a}{c}$　　B $\frac{c}{a}$　　C $\frac{a}{b}$　　D $\frac{b}{a}$

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=1$，则下列关系式成立的是(　　).

A $\sin A = \sin B\cdot\sin C$　　B $\cos A = \sin B\cdot\sin C$

C $\sin C = \sin A + \sin B$　　D $\cos A = -\cos B$

3. 解下列各题：

(1) 已知直角三角形斜边和一直角边的比是 25:7，其内切圆的半径是 1.2 cm，求这直角三角形各边的长.

(2) 方程 $x^2 - \sqrt{2}x + m = 0$ 的两根是一个直角三角形中

两个锐角的余弦 $\cos A$ 和 $\cos B$，求 A、B 的度数和 m 的值.

(3) 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$A=60°$，$a-b=2$，求斜边的长.

第 47 天　解直角三角形的应用

复习要求：

能利用解直角三角形解决特殊四边形、圆等图形中的有关问题，和工农业生产中的实际问题.

例 1　解下列各题：

(1) 如图 47-1，已知等腰 $\triangle ABC$ 中，底边 $BC=20$cm，面积为 $\frac{100\sqrt{3}}{3}$cm²，求它的底角和腰长；

图 47-1

(2) 如图 47-2，已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=30°$，$\angle ACB=135°$，$BC=15$mm，求 AB 的长.

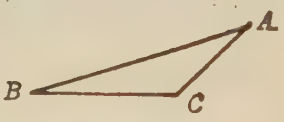


图 47-2

解　(1) 作 $AD\perp BC$，垂足为 D (图 47-3)，则 $BD=\frac{1}{2}BC=10$，

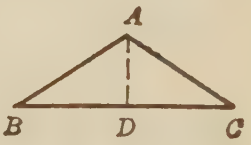


图 47-3

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{100\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore AD=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$\operatorname{tg}B=\frac{AD}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\ \angle B=\angle C=30°,\ AB=2AD=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

(2) 作 BC 的高 AD(图47-4).在 $Rt\triangle ACD$ 中,$\angle ADC=90°$,$\angle ACB=135°$,$\therefore\angle ACD=45°$,于是 $AD=CD$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中,$\operatorname{tg}B=\dfrac{AD}{BD}$,即 $\operatorname{tg}30°=\dfrac{AD}{BC+CD}$.

$\therefore\ \dfrac{AD}{15+AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$AD=\dfrac{15(\sqrt{3}+1)}{2}$.

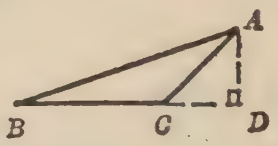


图 47-4

$\because\ \angle B=30°$,

$\therefore\ AB=2AD=15(\sqrt{3}+1)$.

例 2 如图 47-5,$\odot O$内一弦 AB 的长是 24.6cm,弦所对的圆周角是 40°27′,求这圆的半径(精确到 0.1cm).

解 作半径 $OD\perp AB$,垂足为 C,连结 AO,据垂径定理知

$AC=\dfrac{1}{2}AB=12.3$,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}=40°27'$,

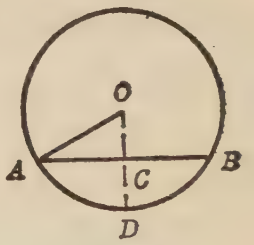


图 47-5

$\therefore\ \angle AOC=40°27'$.

在 $Rt\triangle AOC$ 中,

$$AO=\frac{AC}{\sin\angle AOC}=\frac{12.3}{\sin 40°27'}\approx 19.0(\text{cm}).$$

解直角三角形广泛应用于解各种多边形,如等腰三角形、平行四边形(包括特殊的平行四边形)、梯形和正多边形.还可解圆中的一些问题.解题的思路是通过添加适当的辅助线,使之构成直角三角形.

例 3 如图 47-6,测量人员在山脚 A 处测得山顶 B 的仰角是 45°,沿着倾斜 30° 的山脚前进 1000 米的 D 处,再测得

山顶的仰角是60°，求山高 BC.

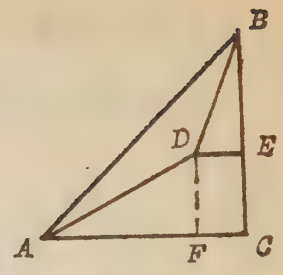


图 47-6

解 过 D 作 $DF\perp AC$，垂足为 F，

∵ $AD=1000$，$\angle DAC=30°$，

∴ $DF=1000\sin30°=500$.

又 $\angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=15°$，

而 $\angle BDE=60°$，$\angle DBC=30°$，

$\angle ABC=45°$，

∴ $\angle ABD=15°$.

于是 $BD=AD=1000$，$BE=1000\sin60°=500\sqrt{3}$，

∴ 山高为 $500+500\sqrt{3}$（米）.

解直角三角形在实际中的应用，主要有以下几方面：度量工具；工程建筑；测量距离等. 解这类问题的一般步骤是：① 审清题意（尤其要明确题中的名词、术语，如跨度、燕尾角、坡度、坡角、仰角、俯角等的意义），并根据题意画出示意图；② 将实际问题中的数量关系归结为直角三角形中元素间的关系；③ 寻找基础直角三角形，并解这个直角三角形.

练习四十七

1. 填空题：

（1）等腰三角形的腰和底之比为 $1:\sqrt{2}$，则底角为____，顶角为____.

（2）在 $\square ABCD$ 中，已知 $\angle B=60°$，$AB=40$mm，$BC=60$mm，则 $\square ABCD$ 的面积是____.

（3）已知矩形的两条对角线相交成 $48°28'$ 的角，对角线长 9.8cm，则矩形的周长=____；面积=____.

（4）一个正八边形的边长为 44cm，它的外接圆半径=____.

2．选择题：

(1) 菱形 $ABCD$ 的对角线 $AC=10, BD=6$，那么 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}$ 等于(　　).

A $\frac{3}{5}$　B $\frac{4}{5}$　C $\frac{3}{\sqrt{34}}$　D $\frac{5}{\sqrt{34}}$

(2) 在地面上一点 A，测得一电视塔尖的仰角为 45°，再向塔底方向前进 100 米，又测得塔尖的仰角为 60°，则此电视塔高约为(　　).

A 227 米　B 237 米　C 247 米　D 257 米

3．解下列各题：

(1) 如图 47-7，沿江堤坝的横断面是梯形 $ABCD$，坝顶 $AD=4.0$ 米，坝高 $AE=6.0$ 米，斜坡 AB 的坡度 $i=1:2$，斜坡 CD 的坡角 $C=60°$，求斜坡 AB 及坡底 BC 的长(精确到 0.1米).

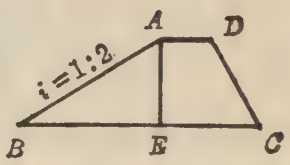


图 47-7

(2) 如图 47-8，已知燕尾槽的燕尾角 $\alpha=55°$，两小球的半径都是 20mm，若两球间的距离 $d=40$mm，求槽的里口宽 AB(精确到 0.1 mm).

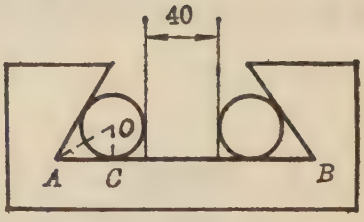


图 47-8

第 48 天　解斜三角形

复习要求：

1．熟记正弦定理、余弦定理和面积公式，并掌握它们的推导过程；

2．掌握利用正弦定理、余弦定理解任意三角形的方法，特别要注意选出适当表达式并根据已知两边一对角的三角形的解的情况，作出正确的判断．

例 1 如图 48-1、图 48-2，已知在四边形 $ABCD$ 中，$AB=2a$，$BC=(\sqrt{3}+1)a$，$AD=\sqrt{2}a$，$\angle B=60°$，$\angle C=75°$，求 CD 的长．

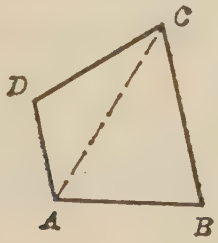


图 48-1

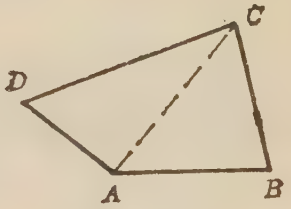


图 48-2

解 连结 AC，在 $\triangle ABC$ 中，

$$AC^2=(2a)^2+(\sqrt{3}+1)^2a^2-2\cdot 2a\cdot(\sqrt{3}+1)a\cdot\cos 60°$$
$$=6a^2,$$

$\therefore\ AC=\sqrt{6}a.$

又在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin B}$，

则 $\sin\angle ACB=\dfrac{2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\ \angle ACB=45°$，或 $\angle ACB=135°$（舍去）．

于是 $\angle ACD=30°$．

在 $\triangle ACD$ 中，$\dfrac{AC}{\sin D}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，

则 $\sin D=\dfrac{\sqrt{6}a\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\ \angle D=60°$，或 $\angle D=120°$.

当 $\angle D=60°$ 时，$\angle CAD=90°$，

$\therefore\ CD=2\sqrt{2}a$，(图 48-2)

当 $\angle D=120°$ 时，$\angle CAD=30°$，

$\therefore\ CD=AD=\sqrt{2}a$(图 48-1).

本题在求 $\angle ACB$ 时，我们用的正弦定理，这样较简便. 若用余弦定理 $\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}$，计算就比较繁琐，同学们不妨一试以作比较. 在 $\triangle ACD$ 中，求 CD 时，我们仍用了正弦定理，其实是较繁的. 若改用余弦定理，则要方便得多.

请看下面的解法：

$\because\ AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD$,

即 $(\sqrt{2}a)^2=(\sqrt{6}a)^2+CD^2-2\sqrt{6}a\cdot CD\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\ CD^2-3\sqrt{2}a\cdot CD+4a^2=0$.

$\therefore\ CD=2\sqrt{2}a$，或 $CD=\sqrt{2}a$.

这种解法可以省去求 $\angle D$，而直接求出 CD，这在 $\angle D$ 不是特殊角时，其优越性更为明显.

由本例可知：① 多边形问题一般可化为三角形问题来解决；② 已知两边一对角的三角形也可以用余弦定理来解.

已知基本元素解斜三角形的大致情况，如下表所示：

解斜三角形
- 已知一边两角 → 正弦定理
- 已知两边一对角夹角 → 余弦定理
- 已知三边 → 余弦定理

例 2 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=30°$，且知下列情况之一：

(1) $a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$；　(2) $a=b=1$；

(3) $a=1$，$b=\sqrt{3}$；　(4) $a=1$，$b=2$；

(5) $a=1$，$b=2\sqrt{3}$.

试判定解的情况．又当 $A=150°$，其他条件不变时，解的情况如何？

解 $A=30°$ 时，(1) 一解；(2) 一解；(3) 二解；(4) 一解；(5) 无解．

当 $A=150°$ 时，(1) 一解；(2) ～(5) 无解．

由本例可知，已知二边一对角的三角形可能有两解、一解和无解．解题时一定要注意解的讨论．具体情况可见下表：

	$\alpha\geqslant 90°$	$\alpha<90°$
对边＞邻边	一解	一解
对边＝邻边	无解	一解
对边＜邻边	无解	对边＞邻边·sinα 二解 对边＝邻边·sinα 一解 对边＜邻边·sinα 无解

表中 α 表示三角形的任一角．对边、邻边均对 α 而言．

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，面积为 $10\sqrt{3}$，外接圆半径 $R=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$，求各边的长．

解 据题意得方程组

$$\begin{cases} b=2R\sin B \\ \dfrac{1}{2}ca\sin B=10\sqrt{3} \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \end{cases},$$

即 $\begin{cases} b=7 \\ ca=40 \\ b^2=c^2+a^2-ca \end{cases}$，亦即 $\begin{cases} ca=40 \\ c^2+a^2=89 \end{cases}$，

解之得 $\begin{cases} a=5 \\ c=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=8 \\ c=5 \end{cases}$。

所以三边的长分别为 5、7、8。

本例是已知非基本元素和一定条件解三角形。其类型与直角三角形中的差不多。解题的思路是设法求出已知元素或条件与正弦定理、余弦定理和面积公式之间的关系，然后再求得解。

例 4 （1）在 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A\sin B\cos C.$$

（2）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b\cdot\cos A=a\cdot\cos B$，求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

证明 （1）左边 $=\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2-\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$$=\frac{1}{4R^2}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{2ab}{4R^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=2\sin A\sin B\cos C=\text{右边}.$$

（2）用余弦定理，得

$$b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

化简得 $a^2=b^2$，　$\therefore\ a=\pm b$。

$\because\ a>0,\ b>0$，　$\therefore\ a=b$。

即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

本题也可用下法来证:根据正弦定理,得

$$2R\sin A\cdot\cos B = 2R\sin B\cdot\cos A,$$

$$\sin A\cos B = \sin B\cos A,$$

$$\therefore\ \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{\cos B},\quad \text{即 } \operatorname{tg}A = \operatorname{tg}B.$$

根据三角形内角和定理,知 A、B 必都为锐角.

$\therefore\ A = B$,即 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

由本例可见,证明边角关系问题可分两类:一类是直接证明边角关系;另一类是给出一定条件,证明边之间关系.其解法是利用余弦定理把角的余弦用边的关系式来代替,或利用正弦定理把边用其对角的正弦来代替,使问题得到简化.象(2)这种证明三角形的形状问题,也常常以另一种形式出现,即不说出求证的结论,要自己作出判断,这就是通常所说的判定三角形的形状问题.

练习四十八

1. 填空题:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b=12$, $\angle A=30°$, $\angle B=120°$,则 $a=$____;已知 $a=2$, $b=6$, $\angle A=30°$,则求$\angle B$的结果是_____;已知 $a=35$, $b=24$, $\angle C=60°$,则 $c=$____;已知 $a=3$, $b=3$, $c=3\sqrt{3}$,则 $\angle A=$____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中,同时满足 $c^2=a^2+b^2$ 和 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 的 $\angle C$ 是____角.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 中,$b=3\sqrt{2}$, $\angle A=45°$,面积为 6,则边长 $c=$____.

(4) 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=120°$, $\angle B=30°$, $a+b=$

$\sqrt{3}+1$，则 $a=$____；$b=$____.

2. 选择题：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=x, b=2$，$\angle B=45°$，若利用正弦定理解此三角形时有两解，则 x 的取值范围是(　　).

A $x>2$　B $x<2$　C $2<x<2\sqrt{2}$　D $2<x\leqslant 2\sqrt{2}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，下列各式正确的是(　　).

A $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$　　B $a\sin A=b\sin B$

C $a\sin C=c\sin B$　D $a\sin B=b\sin A$

(3) 如果 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，则代数式 $a^2-b^2-c^2-2bc$ 的值应该是(　　).

A 大于零　B 小于零　C 等于零　D 无法确定

3. 解下列各题：

(1) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 30cm，且 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$，求三边长.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\dfrac{a-c\cdot\cos B}{b-c\cdot\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$.

(3) 已知 $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$，试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

第 49 天　解斜三角形的应用

复习要求：

能利用解斜三角形解决四边形、圆等图形中的有关问题和工农业生产中的实际问题.

例 1　如图 49-1，在 $\square ABCD$ 中，已知 $AB=10\sqrt{3}$cm，$\angle B=60°$，$AC=30$cm，求 $\square ABCD$ 的面积.

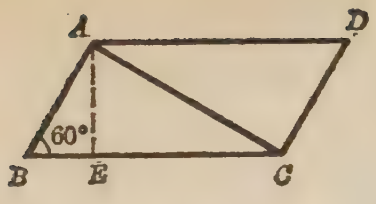


图 49-1

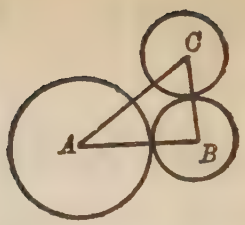


图 49-2

解 在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin 60^\circ}$

$\sin\angle ACB=\dfrac{AB\sin 60^\circ}{AC}=\dfrac{1}{2}$

$\angle ACB=30^\circ$（$\angle ACB=150^\circ$舍去）

$\therefore\ \angle BAC=90^\circ$，从而 $BC=2AB=20\sqrt{3}$.

作 $AE\perp BC$，在 $\triangle ABE$ 中，$AE=AB\sin 60^\circ=15$，

$\therefore\ S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=300\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

例 2 某机械的三个齿轮（如图 49-2）啮合，若 A 轮的直径为 180mm，B、C 两轮的直径都是 120mm，且 $\angle A$ 为 40°，求 A、C 两齿轮的中心距离（精确到 1 mm）.

解 由题意可知 $\odot A$ 与 $\odot B$，$\odot B$ 与 $\odot C$ 分别外切，

则 $AB=90+60=150$，$BC=60+60=120$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}$，

$\sin C=\dfrac{AB\sin A}{BC}\approx 0.8035$，

$\therefore\ \angle C=53^\circ 28'$，$\angle B=86^\circ 32'$.

又 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，$\therefore\ AC=\dfrac{BC\sin B}{\sin A}\approx 186(\text{mm})$.

$\therefore$ A、C 两轮的中心距离为 186mm.

例 3 从高度为 h 的气球上测得铁桥桥头 B 的俯角为 α，桥尾 C 的俯角为 β，求铁桥的长.（如图49-3）

解 根据题意知 $\angle ABD=\alpha$，$\angle ACD=\beta$，$\angle BAC=\alpha-\beta$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AB=\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\dfrac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\dfrac{AB}{\sin\beta}$.

$$\therefore\ BC=\frac{AB\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\dfrac{h}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$$

$$=\frac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

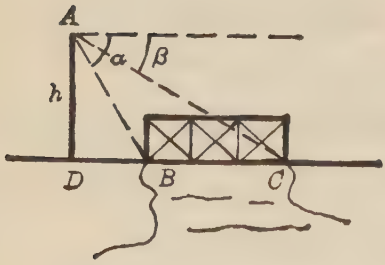


图 49-3

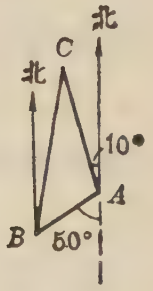


图 49-4

所以铁桥的长为$\dfrac{h\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

本题也可分别从 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中求出 BD、CD 后相减而获解，请同学们自己去完成.

例 4 渔船甲在海中某岛南偏西 50° 方向，和岛相距 12 海里，看到渔船乙刚从岛向北偏西 10° 的方向航行，测得其速度为 10 海里/小时，问渔船甲需用多大速度朝什么方向航行，才能经过 2 小时追及渔船乙？

解 如图 49-4 所示，设 A 为岛的位置，B 为渔船甲的位置，C 为渔船甲追及渔船乙的位置.

又设渔船甲追及渔船乙的速度为 x 海里/小时，

则 $BC=2x$(海里)，$AC=20$ 海里.

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$\angle CAB=180°-(50°+10°)=120°$，由余弦定理，得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos120°$，

即 $$4x^2=12^2+20^2+2\times12\times20\times\frac{1}{2}.$$

解之，得 $x=14$(海里/小时).

由正弦定理，得 $\sin B=\dfrac{AC\sin120°}{BC}=\dfrac{10\sqrt{3}}{2\times14}\approx0.619$.

查表，得 $\angle B=38°13'$，所求的方向为

$$50°-38°13'=11°47'.$$

答：渔船甲需用 14 海里/小时的速度朝北偏东 $11°47'$ 航行，才能追及渔船乙.

在解航行问题时，画示意图要注意画出南北方向线.

练习四十九

1. 填空题：

(1) 菱形一内角为 $30°$，所对的对角线长为 $\sqrt{3}+1$，则这菱形各边的长为____.（$\sin75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，答案可保留根号）

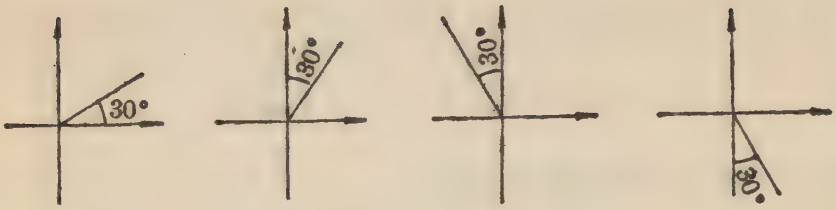
(2) $\odot O$ 的半径为 10cm，弦 $AB=16.8$cm，则弦 AB 所对的弧的度数是____.（精确到 $1°$）

(3) 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 $AC=10$，面积为 $S=25\sqrt{3}$，则两对角线夹角 α 的度数为____.

(4) 梯形两底为 10、14，两腰为 7、6，则各角的度数为____.

2．选择题：

(1) 下列各图表示北偏东30°的是(　　).



A　　B　　C　　D

图 49-5

(2) 在正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点，AE 与 AC 所成的角的正弦值是(　　).

A $\sqrt{10}$　　B $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D $\frac{\sqrt{2}}{4}$

3．解下列各题：

(1) $\square ABCD$ 的边 AD 为 40，对角线 AC 为 80，AC 与 BD 的交角为 30°，求 BD 的长.

(2) 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=1$，$CE\perp BD$，E 点在 DB 上，E 为垂足，求 AE 的长.

(3) 如图 49-6 所示，若山高 AB 为 100 米，由平地 C、D 两点测得山顶 A 的仰角 $\angle ACB=30°$，$\angle ADB=45°$，$\angle CBD=120°$，求水平面上 C、D 两点间的距离.

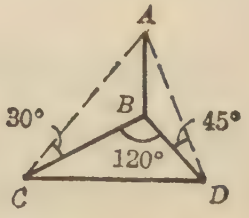


图 49-6

(4) 某轮船在海上以每小时10海里的速度向正西方向航行，上午 8 时在 B 点测得小岛 A 在北偏东 30°，继续向正西航行，于上午 9 时到达 C 点，此时测得小岛 A 在北偏东 60°. 如果轮船继续向正西航行，于上午 11 时到达 D，

这时离小岛有多远?

第 50 天　解三角形在几何证题中的应用

复习要求:

能利用正弦定理、余弦定理、面积公式等知识,证明某些平面几何问题.

例 1　证明三角形内角平分线定理.

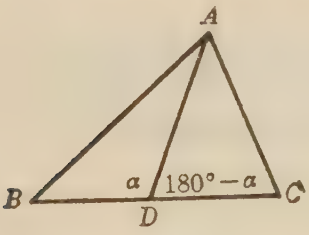


图 50-1

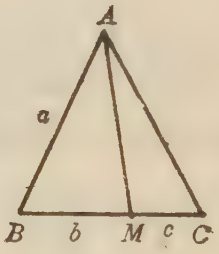


图 50-2

证明　如图 50-1, AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线.

令 $\angle ADB=\alpha$,

则 $\angle ADC=180^\circ-\alpha$.

在 $\triangle ABD$ 中, $\dfrac{AB}{\sin\alpha}=\dfrac{BD}{\sin\dfrac{A}{2}}$, 即 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

在 $\triangle ADC$ 中, $\dfrac{AC}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\dfrac{DC}{\sin\dfrac{A}{2}}$,

即 $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

而 $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$,

$\therefore\ \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AC}{DC}$, 即 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$.

例 2 点 M 是等腰三角形 ABC 底边 BC 上任意一点，求证：$BM\cdot CM = AC^2 - AM^2$.

证明 如图 50-2，设 $AB = AC = a$，$BM = b$，$CM = c$.

在 $\triangle ABM$ 中，$AM^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B$ ①

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B = \dfrac{a^2 + (b+c)^2 - a^2}{2a(b+c)} = \dfrac{b+c}{2a}$ ②

②代入①，得 $AM^2 = a^2 + b^2 - 2ab\dfrac{b+c}{2a}$

$$= a^2 - bc = AC^2 - BM\cdot CM.$$

$\therefore\ BM\cdot CM = AC^2 - AM^2$.

例 3 如图 50-3，从 O 点出发引三条射线 OA、OB、OC，使 $\angle AOB = \angle BOC = 60°$，任作一直线交它们于 P、Q、R.

求证：$\dfrac{1}{OQ} = \dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OR}$.

证明 $S_{\triangle OPR} = \dfrac{1}{2}OP\cdot OR\cdot\sin 120° = \dfrac{1}{2}OP\cdot OR\sin 60°$

$S_{\triangle OQR} = \dfrac{1}{2}OR\cdot OQ\sin 60°$

$S_{\triangle OPQ} = \dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\sin 60°$

$\because\ S_{\triangle OPR} = S_{\triangle OPQ} + S_{\triangle OQR}$,

$\therefore\ OP\cdot OR = OP\cdot OQ + OR\cdot OQ$.

两边同除以 $OP\cdot OR\cdot OQ$，即得

$$\frac{1}{OQ} = \frac{1}{OP} + \frac{1}{OR}.$$

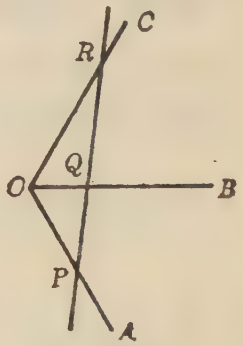


图 50-3

从以上各例可见，用三角法证(解)几何题有时可以少添或不添辅助线，因而图形比较简洁，思路比较明确，较之纯几何法要方便些.

用三角法证(解)几何题的一般步骤是：

① 从几何图形中找出与已知、求证有关的元素如边、角、角平分线、高、中线等等；

② 运用正弦定理、余弦定理、面积公式、三角函数定义等列出关系式；

③ 对关系式进行变换、化简或证明，从而使问题获证(解)。

练习五十

1. 若 a、b 为 $Rt\triangle ABC$ 的两条直角边，h 为斜边 AB 上的高，求证 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$(用三角法)。

2. 已知 PA、PBC 分别是 $\odot O$ 的切线和割线，试用三角法证明 $PA^2=PB\cdot PC$。

3. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AB=AC$，D 为 BC 上一点，求证 $BD^2+CD^2=2AD^2$。

4. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点，求证 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OAC$ 的面积之和不大于 OA 与 BC 乘积的一半。

第 51 天

练习五十一

1. 填空题：

(1) $(\sin 30°)^{\cos 60°}=$____；$\log_{\mathrm{tg}30°}\mathrm{ctg}45°=$____。

(2) 已知角 α 的终边经过点 $(-\sqrt{3},\mathrm{tg}45°)$，则 $\sin\alpha=$____；$\mathrm{ctg}\alpha=$____；如果 $P(x,2)$ 是锐角 θ 终边上一点，且 $\cos\theta=0.1$，则 $x=$____。

(3) 在 $Rt\triangle ABC$ 中（$C=90°$），$A=30°$，$c=50\sqrt{2}$，则 $AC=$____，在等腰三角形 ABC 中，一腰上的高为 $\sqrt{3}$，这个高与底边的夹角为 60°，则 $\triangle ABC$ 的面积为____.

(4) 菱形 $ABCD$ 中，一个锐角 $A=60°$，$AB=a$，则对角线 $AC=$____；$BD=$____；$S_{菱形ABCD}=$____.

2. 选择题：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $b=7$，$c=8$，$\angle B=60°$，则 $\triangle ABC$ 是(　　).

A 锐角三角形　　B 直角三角形

C 钝角三角形　　D 以上都不对

(2) 下列命题中正确的是(　　).

A $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha>0$，则 α 为锐角

B 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\operatorname{tg}A=\frac{4}{3}$，则 $a=4$，$b=3$

C 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D 已知 $A+B=180°$，则 $\sin A=\sin B$

(3) $0°<\alpha<180°$，且 $4\cos^2\alpha-3=0$，则 α 的值为(　　).

A 30° 或 150°　　B 60° 或 120°

C 30°　　D 150°

(4) 下列命题 ① $\sin 10°>\sin 20°$；

② $\cos 10°<\cos 100°$；③ $\operatorname{tg}20°=\operatorname{tg}160°$；

④ $\sin 18°\neq\cos 72°$ 中，正确的结论有(　　).

A 一个　B 两个　C 三个　D 以上都不对

3. 解下列各题：

(1) 计算 $\dfrac{\operatorname{tg}120°-2\cos 135°+\operatorname{tg}45°\cdot\sin 90°-\operatorname{ctg}^2 30°}{\sin^2 23°+\sin^2 67°}$

(2) 化简$\frac{\sin(180°-\alpha)}{\cos(90°-\alpha)}+\operatorname{ctg}(15°+\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(75°-\alpha)$.

(3) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 7.5cm，且 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$，求各边的长.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $B=60°$，$b^2=ac$，判定 $\triangle ABC$ 的形状.

(5) 方程 $a(1-x^2)+2bx+c(1+x^2)=0$ 无实根，a、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边，试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

(6) 一船向正西航行，当它在小岛 A 的正南时，测得远处的灯塔 B 与船的航线成 30° 角，此船继续前进 1 海里后，测得 A 在船的北偏东 45°，而 B 在船的北偏西 15°，求小岛与灯塔的距离.

第二部分　平面几何

一、基本概念

本单元的主要内容及其相互关系见下页表.

第52天　基本概念

复习要求：

1．了解直线、射线及线段的区别与联系；

2．掌握直线公理和性质，掌握线段公理及两点间距离和线段中点的概念；

3．掌握角的分类及余角、补角的概念与性质，掌握角平分线的概念；

4．掌握线段和角的和、差、倍、分的计算和证明.

例1　已知线段 AC 和 BC 在一条直线上，如果 $AC=5.6\text{cm}$，$BC=2.4\text{cm}$，求线段 AC 和 BC 的中点间的距离.

分析：由于点 A、B、C 在一条直线上，如果先固定线段 AC，那么点 B 有两种可能位置：①如图52-1点 B 在线段

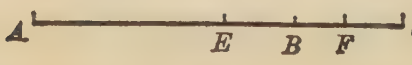


图 52-1

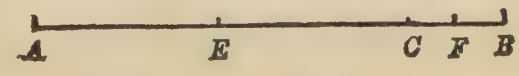
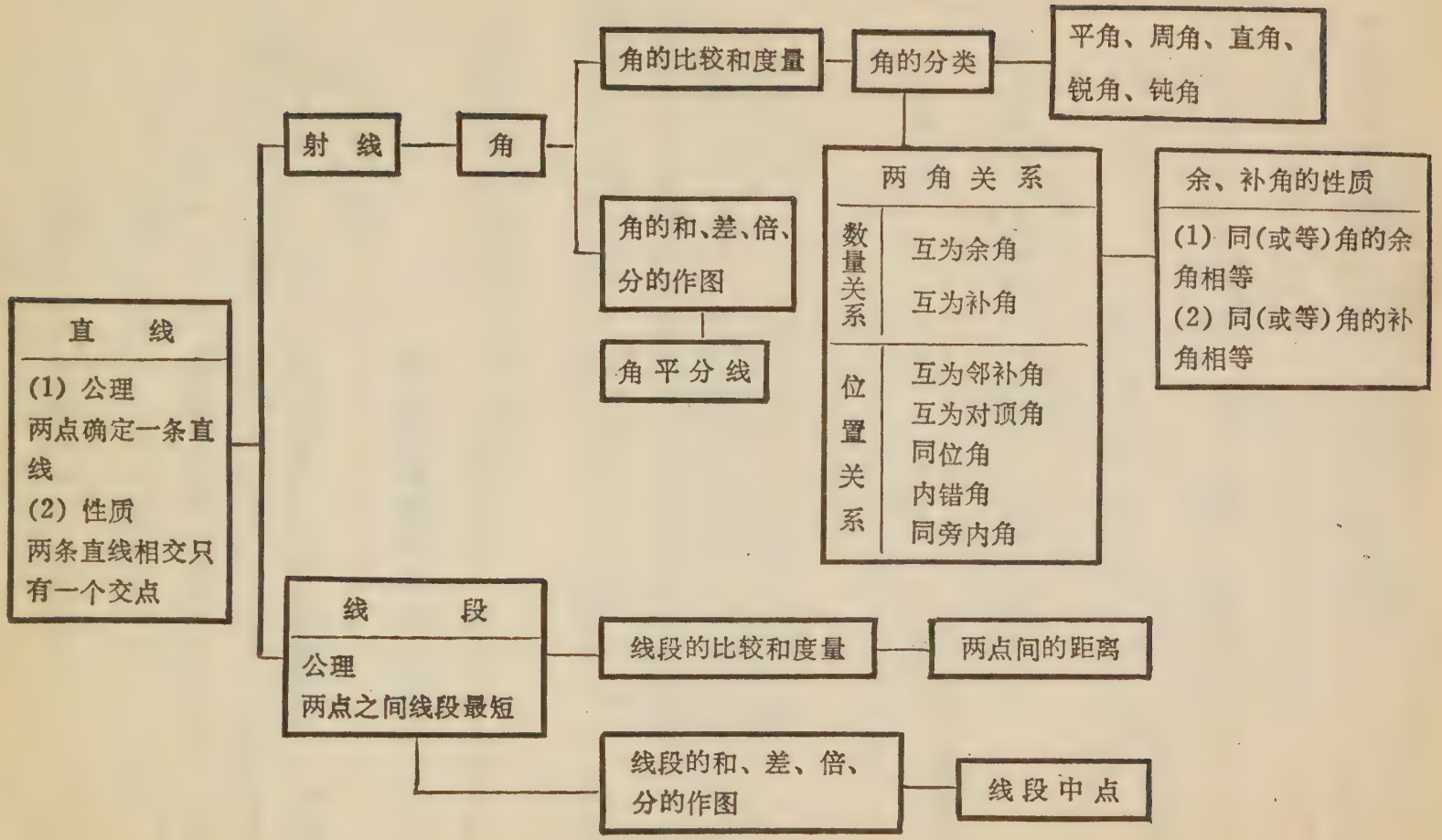


图 52-2


直 线
(1) 公理
两点确定一条直线
(2) 性质
两条直线相交只有一个交点
射 线
角
角的比较和度量
角的分类
平角、周角、直角、锐角、钝角
两 角 关 系
数量关系
互为余角
互为补角
位置关系
互为邻补角
互为对顶角
同位角
内错角
同旁内角
余、补角的性质
(1) 同(或等)角的余角相等
(2) 同(或等)角的补角相等
角的和、差、倍、分的作图
角 平 分 线
线 段
公理
两点之间线段最短
线段的比较和度量
两点间的距离
线段的和、差、倍、分的作图
线 段 中 点

AC 上；② 如图 52-2 点 B 在线段 AC 的延长线上.

解 设 AC、BC 的中点分别为 E、F，则由线段中点的定义得：

$$AE=EC=\frac{1}{2}AC,\quad BF=FC=\frac{1}{2}BC.$$

根据图 52-1

$$EF=EC-CF=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC$$

$$=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}(5.6-2.4)=1.6(\text{cm}).$$

根据图 52-2

$$EF=EC+CF=\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}BC$$

$$=\frac{1}{2}(AC+BC)=\frac{1}{2}(5.6+2.4)=4(\text{cm}).$$

∴线段 AC 和 BC 的中点间的距离是 1.6cm 或 4cm.

在几何计算或证明中，常常会出现两解或多解的情况，应重视审题. 另外，如果点 E 为 AC 的中点时，一般有以下三种表示方法：

① $AE=EC$；② $AE=\frac{1}{2}AC$，$EC=\frac{1}{2}AC$；③ $AC=2AE$，$AC=2EC$。应根据解题需要选取.

例 2 已知如图 52-3，$\angle AOB$ 的平分线为 OM，ON 为 $\angle MOA$ 内的一条射线，OG 为 $\angle AOB$ 外的一条射线.

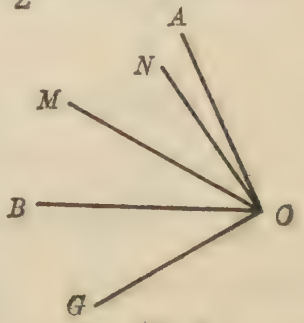


图 52-3

求证 (1) $\angle MON=\frac{1}{2}(\angle BON-\angle AON)$；

(2) $\angle MOG=\frac{1}{2}(\angle AOG+\angle BOG)$.

分析：(1) $\angle MON=\frac{1}{2}\angle AOB-\angle AON$，

而 $\angle AOB=\angle BON+\angle AON$，将这个式子代入上式

即得 $\angle MON=\frac{1}{2}(\angle BON-\angle AON)$

(2) $\angle MOG=\frac{1}{2}\angle AOB+\angle BOG$.

而 $\angle AOB+\angle BOG=\angle AOG$，代入上式即得

$$\angle MOG=\frac{1}{2}(\angle AOG-\angle BOG)+\angle BOG$$

$$=\frac{1}{2}(\angle AOG+\angle BOG).$$

如果 OM 是 $\angle AOB$ 的平分线时，一般有以下三种表示方法：① $\angle AOM=\angle MOB$；② $\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB$，$\angle MOB=\frac{1}{2}\angle AOB$；③ $\angle AOB=2\angle AOM$，$\angle AOB=2\angle MOB$. 根据解题需要选取.

练习五十二

1. 选择题：

(1) 在同一平面上有四个点，其中设有三个点在一条直线上，这四个点可以确定(　　)直线.

A 3条　B 4条　C 5条　D 6条

(2) 一个角的余角和它的补角的比是1:3，则这个角是(　　)。

A 30°　B 45°　C 60°　D 75°

(3) 如果两个非零度角互为补角，那么这两个角一定是(　　).

A 两个钝角　B 两个直角　C 一个钝角，一个锐角

D 两个直角或一钝角，一锐角

(4) 下列命题正确的是(　　).

A 在所有连结两点的线中直线最短

B 连结两点的线段，叫做这两点间的距离

C 如果两个非零度的角互余，那么这两个角都是锐角

D 两线相交有且仅有一个交点

2. 填空题：

(1) 长 24cm 的线段，被分成不等的四部份。首尾两部份的中点之间距离是 20 cm，则中间两部分中点间的距离为____.

(2) 如图 52-4，$\angle\alpha:\angle\beta:\angle\gamma=1:2:4$，$\angle\delta=80°$，则 $\angle\alpha=$____，$\angle\gamma=$____.

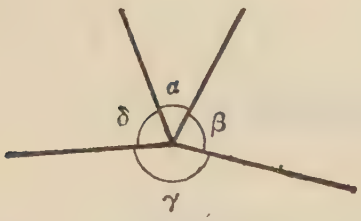


图 52-4

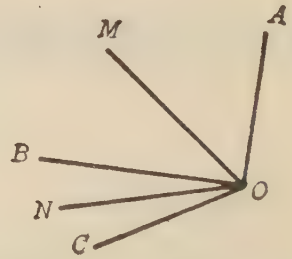


图 52-5

(3) 如图 52-5，$\angle AOB$ 是直角，$\angle BOC$ 是锐角，OM 平分 $\angle AOC$，ON 平分 $\angle BOC$，那么 $\angle MON=$____.

(4) 互为补角的两角差为15°，则较大角的度数是____.

3. 计算：

(1) B、C 两点把线段 AD 分成 2:3:4 三部分，M 是线段 AD 的中点，$CD=12$cm. 求：① MC 的长，② $AB:BM$ 的值.

(2) 如果 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互为邻补角，且 $\angle\alpha>\angle\beta$，求 $\angle\beta$ 的余角.（用 $\angle\alpha$、$\angle\beta$ 的代数式表示）

二、相交线、平行线

本单元的主要内容和其相互关系见下页表.

第 53 天　　相交线、平行线

复习要求：

1. 掌握对顶角的概念及其性质；

2. 掌握两条直线互相垂直的概念及其性质，掌握点到直线的距离的概念；

3. 掌握平行线的概念和平行公理，熟悉平行线的判定定理与性质.

例 1　如图 53-1，已知 $AB\parallel CD$. 求证：$\angle B+\angle D+\angle E=360°$.

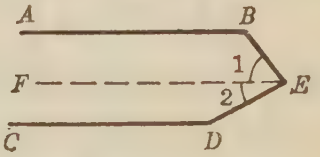


图　53-1

证明　过点 E 作 $EF\parallel AB$，则 $EF\parallel CD$，

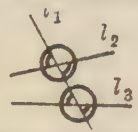
$\therefore\angle B+\angle 1=180°$，$\angle D+\angle 2=180°$.

$\therefore\angle B+\angle D+\angle 1+\angle 2=360°$. 即 $\angle B+\angle D+\angle E=360°$.

要利用平行线的性质，关键是要有第三条直线. 由于 AB、

两直线相交

- 对顶角
  - 性质：对顶角相等
- 垂线
  - 垂线性质：(1) 经过一点有且只有一条直线垂直于已知直线；(2) 垂线段最短
    - 点到直线的距离
    - 线段的垂直平分线
- 斜线
- 三线八角



四对同位角
二对内错角
二对同旁内角

两直线平行

公理：经过直线外一点有且仅有一条直线和这条直线平行

	平行线的判定		平行线的性质
线角关系	(1) 同位角相等 (2) 内错角相等 (3) 同旁内角互补	⟺	两直线平行
线角关系			一个角的两边分别平行于另一个角的两边，这两个角相等或互补
线线关系	$l_1 // l_3$，$l_2 // l_3$ $\Longrightarrow l_1 // l_2$		
线线关系	$l_1 \perp l_3$，$l_2 \perp l_3$ $\Longrightarrow l_1 // l_2$		$l_1 // l_2$，$l_1 \perp l_3$ $\Longrightarrow l_2 \perp l_3$

一个角的两边分别垂直于另一个角的两边，这两个角相等或互补

CD 可以被各种不同位置的第三条直线所截，所以添辅助线还有以下几种方法，如图 53-2，你能根据所添的线，来证明吗？

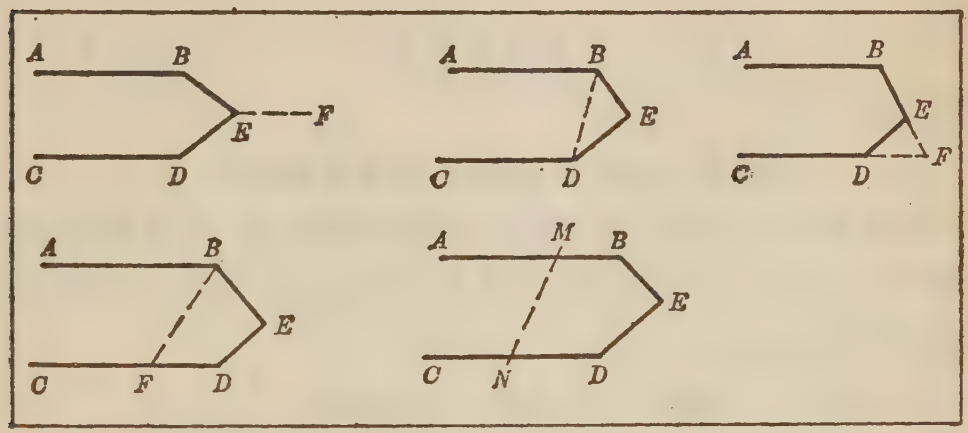


图 53-2

例 2 如图 53-3，已知 $\angle AEF=\angle B$，$\angle FEC=\angle GHB$，GH 垂直于 AB，G 为垂足，求证：$CE\perp AB$.

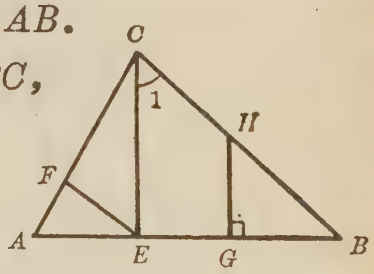


图 53-3

证明 $\because \angle AEF=\angle B$，$\therefore EF\parallel BC$，

$\therefore \angle FEC=\angle 1$.

又 $\because \angle FEC=\angle GHB$，

$\therefore \angle GHB=\angle 1$，$\therefore GH\parallel CE$.

$\because GH\perp AB$，$\therefore CE\perp AB$.

把证两条直线垂直问题转化为证明两条直线平行问题，反之，证两条直线平行问题也可转化为证明两条直线垂直问题．这种转化思想方法是平几证明的基本思想方法．

练习五十三

1．选择题：

(1) 如图 53-4，直线 $AB\parallel CD$，$\angle EBF=139°$，$\angle BFD=60°$，则 $\angle D$ 是(　　).

A 41°　B 19°　C 79°　D 20°

(2) 如果两个角的一边在同一条直线上，另一边互相平行，那么这两个角(　　).

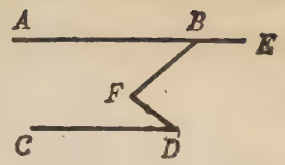


图 53-4

A 相等　B 互补　C 相等或互补　D 相等且互补

(3) 下列条件中，位置关系互相垂直的是(　　).

① 对顶角的平分线；② 邻补角的平分线；③ 平行线的同位角的平分线；④ 平行线的内错角的平分线；⑤ 平行线的同旁内角的平分线.

A ①②　B ③④　C ①⑤　D ②⑤

2. 填空题：

(1) 如图 53-5，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=118°$，则 $\angle 4=$____.

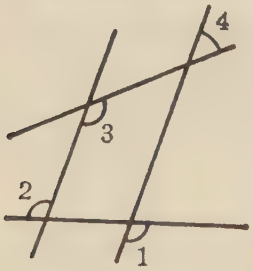


图 53-5

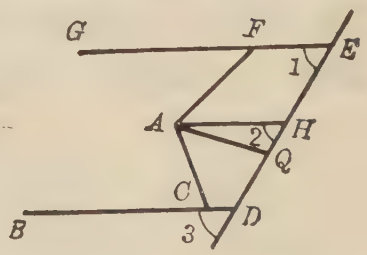


图 53-6

(2) 如图 53-6，，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle GFA=36°$，$\angle ACB=60°$，$AQ$ 平分 $\angle FAC$，则 $\angle HAQ=$____.

(3) 如果两个角的两条边分别平行，而其中一个角比另一个角的 4 倍少 30°，则这两个角分别是_____.

3. 证明题：

(1) 如图 53-7，已知 $AD\perp BC$，垂足是 D，$EG\perp BC$，垂足是 G，EG 交 AB 于 F，$\angle AFE=\angle E$，求证：AD 平分 $\angle BAC$.

(2) 如图 53-8,已知$\angle BED=\angle B+\angle D$,求证:$AB\parallel CD$.

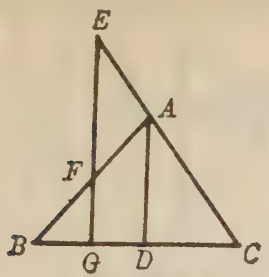


图 53-7

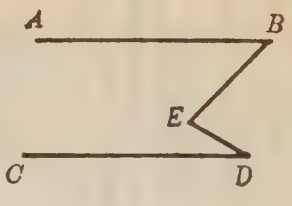


图 53-8

三、三 角 形

这一单元内容分 4 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见下页表.

第 54 天 三角形的性质

复习要求:

1. 理解三角形的有关概念,掌握三角形的边角关系,三角形内角与外角的性质;

2. 掌握三角形的分类;

3. 熟悉三角形的主要线段及"四心";

4. 掌握线段的垂直平分线的正逆定理.

下面请看几种类型的例题:

例 1 如图 54-1,已知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心,$\angle EAC$、$\angle ACF$ 的角平分线交于 D.

求证:

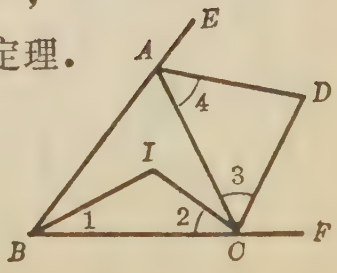
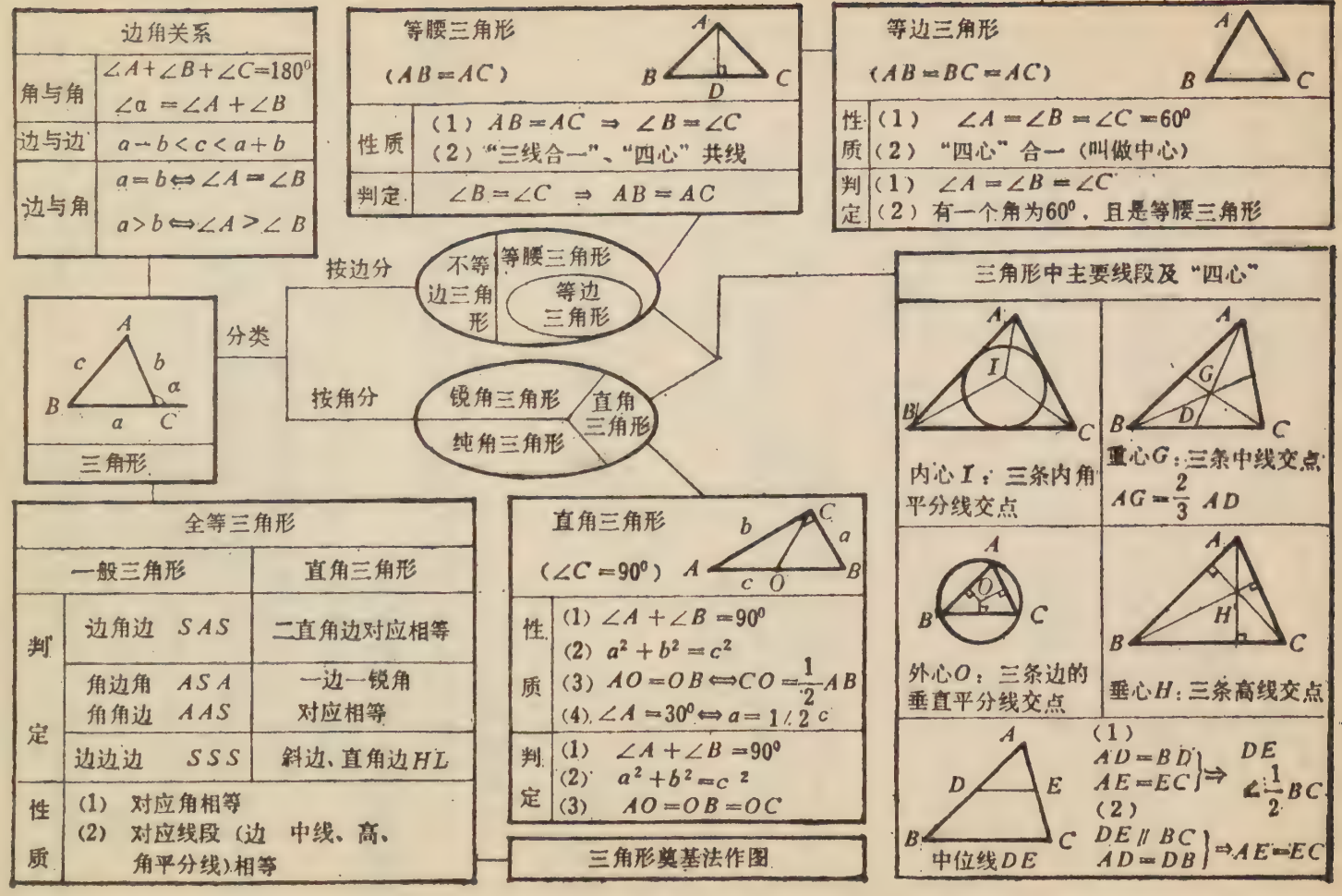


图 54-1


边角关系
角与角
∠A+∠B+∠C=180°
∠α=∠A+∠B
边与边
a-b<c<a+b
边与角
a=b⇔∠A=∠B
a>b⇔∠A>∠B
等腰三角形
(AB=AC)
性质
(1) AB=AC ⇒ ∠B=∠C
(2) "三线合一"、"四心"共线
判定
∠B=∠C ⇒ AB=AC
等边三角形
(AB=BC=AC)
性质
(1) ∠A=∠B=∠C=60°
(2) "四心"合一(叫做中心)
判定
(1) ∠A=∠B=∠C
(2) 有一个角为60°，且是等腰三角形
分类
按边分
不等边三角形
等腰三角形
等边三角形
按角分
锐角三角形
直角三角形
纯角三角形
三角形
三角形中主要线段及"四心"
内心I：三条内角平分线交点
重心G：三条中线交点
AG=2/3 AD
外心O：三条边的垂直平分线交点
垂心H：三条高线交点
中位线DE
(1) AD=BD, AE=EC ⇒ DE ∥ 1/2 BC
(2) DE∥BC, AD=DB ⇒ AE=EC
全等三角形
一般三角形
直角三角形
判定
边角边 SAS
二直角边对应相等
角边角 ASA
角角边 AAS
一边一锐角对应相等
边边边 SSS
斜边、直角边HL
性质
(1) 对应角相等
(2) 对应线段(边 中线、高、角平分线)相等
直角三角形
(∠C=90°)
性质
(1) ∠A+∠B=90°
(2) a²+b²=c²
(3) AO=OB⇔CO=1/2 AB
(4) ∠A=30°⇔a=1/2 c
判定
(1) ∠A+∠B=90°
(2) a²+b²=c²
(3) AO=OB=OC
三角形奠基法作图

(1) $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$;

(2) $\angle ADC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC$.

分析：(1) 由三角形内角和性质知 $\angle BIC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$.而 I 为内心,故 $\angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$，将此两式代入上式计算即可证得.

(2) 同理可知 $\angle ADC=180^\circ-(\angle 3+\angle 4)$，而 AD、CD 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线,应用外角与内角的关系得

$$\angle 3=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC),$$

$$\angle 4=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB),$$

将此两式代入上式计算即可证得.

证明过程由同学自己完成.

三角形的内、外角的性质运用恰当,往往可以少添或不添辅助线,简化证明过程. 例如在(2)的证明中如果不利用外角的性质则需添辅助线,“连结 AI”，证明过程也要复杂得多.

例 2 如图 54-2，已知在四边形 $ABCD$ 中,M、P、N分别是 BC、CD、DA 的中点,BP交 DM 于 G,MN 交 AG 于O. 求证:$OM=ON$.

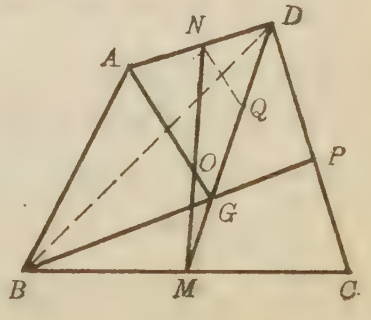


图 54-2

证明 过 N 作 $NQ\parallel AG$ 交 DG 于Q,则 $GQ=\frac{1}{2}GD$,连结 BD.

∵ 在 $\triangle BCD$ 中 G 是两条中线 BP、DM 的交点,

$\therefore$ G 为 $\triangle BCD$ 的重心，故 $MG=\frac{1}{2}GD$，

$\therefore$ $MG=GQ$，又$\because OG\parallel QN$，$\therefore$ $OM=ON$.

此题主要运用了三角形的重心及其性质和三角形中位线定理的逆定理来证明的，而在图形中识别 G 为 $\triangle BDC$ 的重心与巧妙地利用重心的性质是证明本题的关键.

三角形的中位线是一个基本图形，在一个图形中如果出现多个中点时，往往可考虑利用中位线的性质加以证明，当这个基本图形不完整时应把它补完整.

例 3 在三角形中已知两边之长分别为 $5a$ 和 $3a(a>0)$，那么第三边上中线的长度 x 的取值范围是(　　).

A $2a<x<8a$　B $x>4a$

C $a<x<4a$　D 以上答案都不对

分析：如图 54-3，设$\triangle ABC$ 中 $AB=5a$，$AC=3a$，BC 边上中线 $AD=x$，延长中线 AD 至 E 使 $DE=x$，连结 BE，则 $\triangle ACD\cong\triangle EBD$，$\therefore$ $BE=AC=3a$.

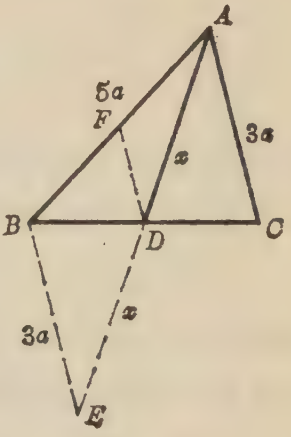


图　54-3

在 $\triangle ABE$ 中，由三角形两边之和大于第三边可得，$AB-BE<AE<AB+BE$，即 $5a-3a<2x<5a+3a$，计算得 $a<x<4a$，故选 C.

此题的关键在于把三条边都集中到同一个三角形中去，中线“加倍”法是遇到中线问题的常用方法之一.

本题还可过 D 作 AC 的平行线交 AB 于 F.如图54-3，然后利用三角形中位线定理来证明.

练习五十四

1. 选择题：

(1) 下列哪几组线段可以围成三角形(　　).

① 3、4、5，② 3、7、4，③ 5、2、2；

④ 1、2、$\sqrt{3}$；⑤ 1、1、$\sqrt{2}$

A ①②③ B ②③④ C ①④⑤ D ③④⑤

(2) 一个三角形中不同顶点的两个外角和等于3个直角,这个三角形一定是(　　).

A 锐角三角形　　B 直角三角形

C 钝角三角形　　D 不能确定

(3) 如果一个三角形的重心在它的一条高线上，那么这个三角形一定是(　　).

A 等腰三角形　　B 直角三角形

C 等边三角形　　D 任何一个三角形

(4) 如图54-4，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F$的度数为(　　).

A 720°　B 540°　C 360°　D 180°

(5) 三角形的三条边的中垂线的交点叫三角形的(　　).

A 垂心　　B 重心

C 外心　　D 内心

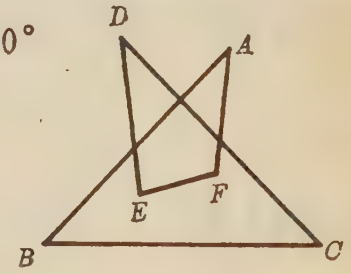


图 54-4

2. 填空题：

(1) 三角形两角分别为48°与52°．则第三角的平分线与它的对边上的高的夹角等于____度.

(2) $\triangle ABC$的三条外角平分线相交成一个$\triangle LMN$.则$\triangle LMN$是____三角形.

(3) 连结$\triangle ABC$三边中点所围成的三角形的周长为6 cm,则$\triangle ABC$的周长=____cm.

(4) 如图54-5，若G为$\triangle ABC$的重心，那么$GD:AG$

$AD=$____.

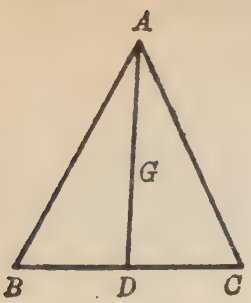


图 54-5

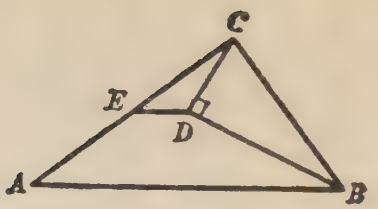


图 54-6

(5) 等腰三角形周长是 12cm，一边与另一边的差是 3 cm，则腰长为____，底边长为____.

3. 证明题：

(1) 如图 54-6，已知 BD 平分 $\angle ABC$，$CD\perp BD$，$AE=EC$，求证：$DE\parallel AB$.

(2) 已知 E 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle FAC$ 平分线上的一点.求证：$BE+CE>AB+AC$.

第 55 天　全等三角形

全等三角形是三角形中的重点. 它是研究线段和角的相等、图形与图形之间的全等关系的基础，要求能熟练地判定两个三角形全等，能应用全等三角形证明线段和角相等.

例 1　如图 55-1，已知 $\angle B=\angle C$，$AE=AD$.

求证：$\triangle BOD\cong\triangle COE$.

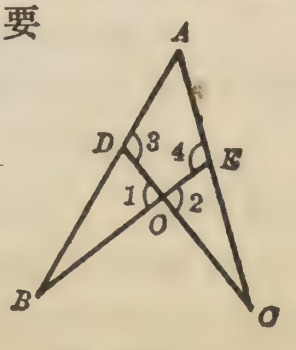


图 55-1

分析：$\triangle BOD \cong \triangle COE$

$\angle B=\angle C$　$BD=EC$　$\angle 1=\angle 2$

$AB=AC$

$\triangle AEB \cong \triangle ADC$

$\angle A=\angle A$　$\angle 3=\angle 4$　$AD=AE$

$\angle 1=\angle 2$　$\angle B=\angle C$

请同学自己写出证明过程.

在证明两个三角形全等时，特别应该注意全等的条件，防止用两边一对角对应相等来判断两个三角形全等.

如图 55-2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中，$AB=DE$，$AC=DF$，$\angle B=\angle E$，但它们显然不全等.

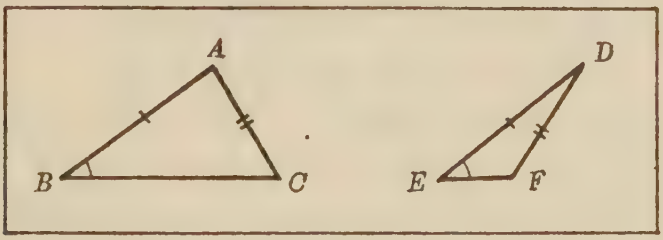


图　55-2

例 2　如图 55-3，已知 $AB=DE$，直线 AE、BD 相交于 C，$\angle B$ 与 $\angle D$ 互补.

求证：$AC=CE$.

证明　过 A 作 $AF \parallel DE$ 交 BC 于 F，则 $\angle D=\angle 1$.

$\because$ $\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle D+\angle B=180°$，

$\therefore$ $\angle 2=\angle B$，$\therefore$ $AB=AF$.　$\because AB=DE$，$\therefore AF=DE$.

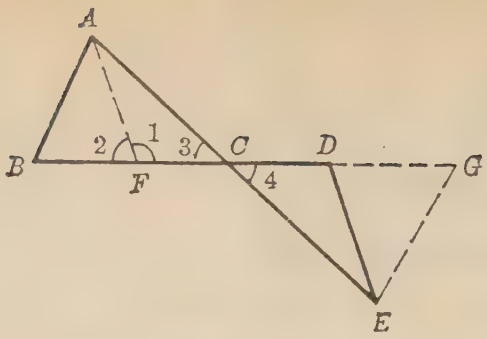


图 55-3

又 ∵ $\angle 3=\angle 4,\angle 1=\angle D$，∴ $\triangle AFC\cong\triangle EDC$.

∴ $AC=CE$.

此题也可以过 E 作 $EG\parallel AB$ 交 BD 延长线于 G. 同样可证 $\triangle ABC\cong\triangle EGC$，如图 55-3.

利用全等三角形证等边(或等角)问题的基本思想是：寻找以这两条线段(或两个角)为对应边(或对应角)的两个三角形，再设法证明它们全等.

想一想，此题还有其它的添线方法吗？

例 3 如图 55-4，已知 $AB=AC$，P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $PC>PB$.

求证：$\angle APB>\angle APC$.

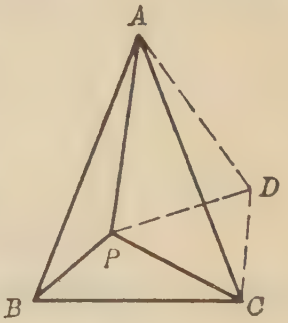


图 55-4

证明 在 $\triangle ABC$ 的外侧作 $\triangle ACD$，使 $AD=AP,CD=BP$.

又 ∵ $AB=AC$，∴ $\triangle ABP\cong\triangle ACD$.

∴ $\angle ADC=\angle APB$.

连结 PD. ∵ $PC>PB$，∴ $PC>CD$，∴ $\angle PDC>\angle CPD$.

又 ∵ $AP=AD$，∴ $\angle ADP=\angle APD$，∴ $\angle ADC>\angle APC$.

∴ $\angle APB>\angle APC$.

证明角(或线段)的不等关系的基本方法是通过变换，把

要证明的角(或线段)集中到同一个三角形中，比较它们所对边(或角)的大小.

练习五十五

1. 选择题：

(1) 在下列命题中，正确的是(　　).

A 有三个角对应相等的两个三角形全等

B 有二边和其中一边的对角对应相等的两个三角形全等

C 有两边对应相等且这两边夹角的正弦也相等的两个三角形全等

D 有一组对应边上的高相等的两个相似三角形是全等三角形

(2) 如图 55-5，$AB=AC$，D、E 分别为 AB、AC 的中点，G、H 分别为 AD、AE 的中点，则全等三角形有(　　)对.

A 4　B 5　C 6　D 7

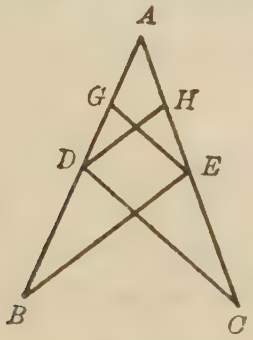


图 55-5

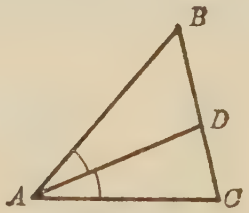


图 55-6

(3) 如果两个三角形的两条边和其中一边上的高分别对应相等，那么这两个三角形的第三边所对的角的关系是(　　).

A 相等　B 不相等　C 互余　D 互补或相等

(4) 如图 55-6，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，$\angle A$ 的平分 AD 交 BC 于 D，则 BD 与 DC 的大小关系是(　　).

A $BD>DC$　B $BD<DC$　C $BD=DC$　D 不能确定

2. 填空题：

(1) 如图 55-7，在 $\triangle ABC$ 中，H 是高 AD 和 BE 的交点，且 $BH=AC$，则 $\angle ABC=$____度.

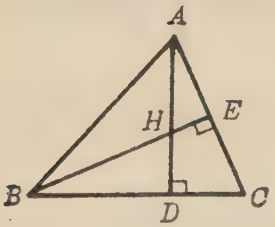


图　55-7

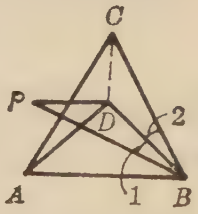


图　55-8

(2) 如图 55-8，D 为等边三角形 ABC 内一点．且 $BD=DA$，$BP=AB$，$\angle 1=\angle 2$，则 $\angle P=$____度.

3. 证明题：

(1) 如图 55-9，已知线段 $CB\perp AD$，垂足为 B，$AB=BC$，且 $BF=BD$．求证：$AE\perp CD$.

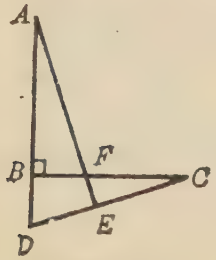


图　55-9

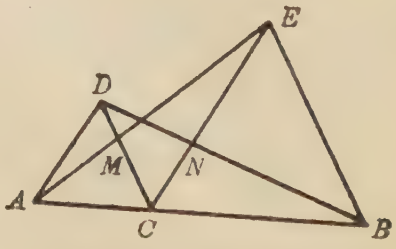


图　55-10

(2) 如图 55-10，已知 C 是线段 AB 上任一点，$\triangle ACD$、$\triangle BCE$ 都是正三角形，AE、BD 分别交 DC，EC 于 M、N．求证：$CM=CN$.

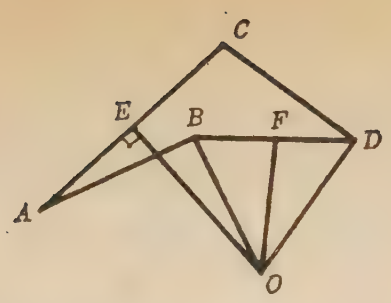


图 55-11

(3) 如图 55-11，已知 $AB=CD$，AC、BD 的垂直平分线相交于 O. 求证：$\angle ABO=\angle CDO$.

第 56 天　　特殊三角形

今天主要复习两种重要的特殊的三角形：等腰三角形和直角三角形. 这两种图形是常见的基本图形.

复习要求：

1. 掌握等腰三角形的性质与判定及等边三角形的性质与判定；

2. 掌握直角三角形的几个重要性质定理；

3. 会利用等腰三角形的性质证两线段（或两角）相等与垂直；

4. 会利用直角三角形中的性质证线段的倍半关系.

例 1　如图 56-1，已知 $\triangle ABC$ 中，AD 是角平分线，M 是 BC 的中点，$MF\parallel DA$ 交 AB 和 CA 的延长线于 E、F. 求证：$BE=CF$.

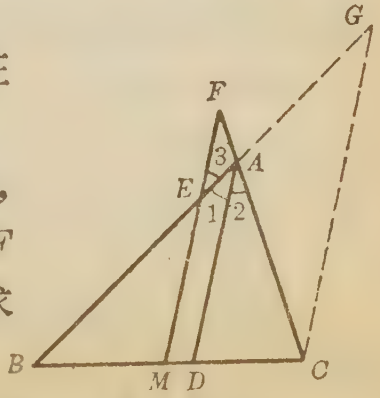


图 56-1

证明：过 C 作 $CG\parallel AD$ 交 BA 的延

长线于 G.

$\because AD \parallel MF, \therefore \angle 2 = \angle F, \angle 1 = \angle 3$.

$\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle F, \therefore AF = AE$.

同理可证：$AG = AC, \therefore AC + AF = AG + AE$.

即 $CF = EG$.

又 $\because ME \parallel CG$，且 $BM = MC, \therefore BE = EG, \therefore BE = CF$.

在一个含有角平分线的图形中，如果出现以下两种平行线(如图 56-2)，那么就可以组成等腰三角形，我们把这种关系简写成“角平分线＋平行线→等腰三角形”，也就是说，等腰三角形可以由角平分线和平行线这两个基本图形组成.

图 56-2

我们上面就是用这种方法找到证题思路的. 用基本图形来分析证题思路还有助于启发我们合理地添加辅助线. 如果已有的基本图形不完整，那就添加辅助线将基本图形补全.

例 2 如图 56-3，已知 BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle B$、$\angle C$ 的外角平分线. $AF \perp BD$，$AG \perp CE$，F、G 是垂足. 求证：$FG \parallel BC$；$FG = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$.

证明 延长 AG 交 BC 的延长线于 H，延长 AF 交 CB 的延长线于 K.

$\because \angle 1 = \angle 2, BD \perp AK, BF = BF$,

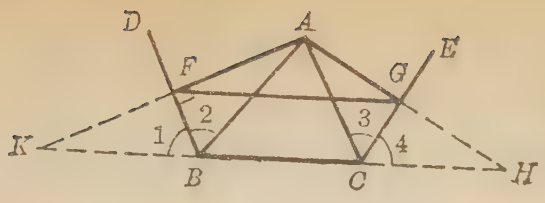


图 56-3

$\therefore\ \triangle ABF\cong\triangle KBF,\quad \therefore\ AF=FK, AB=BK.$

同理可证 $AG=GH, AC=CH.$

$$\therefore FG\parallel BC, FG=\frac{1}{2}KH=\frac{1}{2}(KB+BC+CH)$$

$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC).$$

等腰三角形也可以由角平分线和垂线这两个基本图形组成,即“角平分线+垂线⟶等腰三角形”. 如图 56-4.

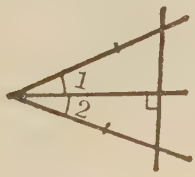


图 56-4

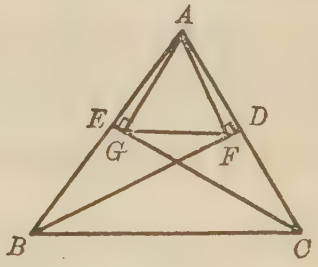


图 56-5

因为 例 2 中基本图形不完整,所以我们用辅助线把它添完整.

想一想,如果在上题中将“外角平分线”改作“内角平分线”,如图 56-5,应如何添加辅助线来证明?

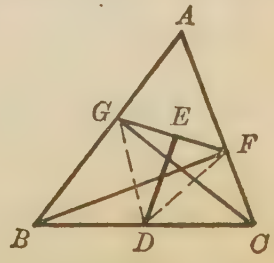


图 56-6

例 3 如图 56-6,已知在 $\triangle ABC$ 中,$BF\perp AC, CG\perp AB$,F、G是垂足,D、E 分别是 BC、FG的中点. 求证:

$DE \perp FG$.

证明 连结 DF、DG.

$\because$ $BF \perp AC$, $CG \perp AB$, D 是 BC 的中点;

$\therefore$ $DF = \frac{1}{2}BC$, $DG = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore$ $DF = DG$.

又 $\because$ E 是 GF 的中点,

$\therefore$ $DE \perp FG$.

直角三角形斜边上的中线是基本图形之一. 在几何问题中,如果出现以下两种情况之一:①直角三角形斜边上的中点;② 直角三角形中与斜边有关的倍半关系时,常常要应用这个基本图形来证明. 如果需添辅助线,一般应添斜边上的中线.

运用等腰三角形的"三线合一"性质时, 应该注意它的条件,即① 三角形中有两边相等; ② 三角形中的一条线段为顶角角平分线、底边上的高、底边上的中线之一. 这两个条件必须同时具备才能得出其它两条结论.

练习五十六

1. 选择题:

(1) 等腰 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90°$, D 是 BC 边上的一点, $AD = 2CD$, 则 $\angle ADB$ 的度数为(　　).

A 30°　B 60°　C 120°　D 150°

(2) 在边长为 5cm 和 9cm 的等腰三角形中,它的周长为(　　).

A 19cm　B 23cm　C 25cm　D 19cm 或 23cm

(3) 给出下列条件:

① 已知两腰;② 已知底边和顶角; ③ 已知底边和底边

上的中线；④ 已知底角和顶角；⑤ 已知底边和腰上中线．

上述中不能确定等腰三角形的条件为(　　)．

A ①②③　B ②③④　C ③④⑤　D ②③⑤

(4) 直角三角形的两直角边分别为5、12，那么它的内心到斜边的距离是(　　)．

A 0.125　B 1　C 2　D $\sqrt{3}$

2．填空题：

(1) 直角三角形两直角边的长分别为6cm和4cm，斜边上的中线长为(　　)cm．

(2) 边长为 a 的正三角形的高是____，外接圆的半径是____．

(3) 等腰三角形的腰为5，底为6，P 是底边上任一点，则 P 到两腰的距离之和是____．

(4) E、F 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 上的两点，$AF=AC$，$BE=BC$，则 $\angle ECF=$____度．

3．证明题：

(1) 如图56-7，已知 $\triangle ABC$ 中 AD 是角平分线，E 是 AB 上的一点，$AE=AC$，$EF\parallel BC$ 交 AC 于 F．

求证：CE 平分 $\angle DEF$．

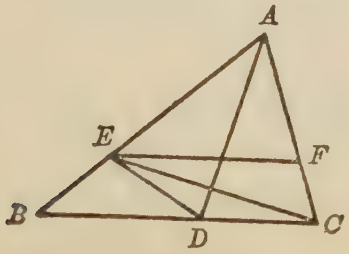


图 56-7

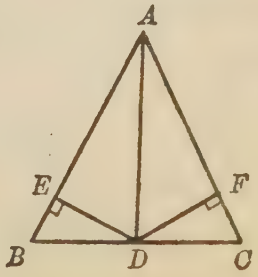


图 56-8

(2) 如图56-8，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是 BC

上的高，$DE\perp AB$，E为垂足，$DF\perp AC$，F为垂足，且$DE+DF=AD$. 求证：$BE+CF=\frac{1}{2}BC$.

第57天　练习五十七

1. 选择题：

(1) 等腰三角形的一个内角为70°，它一腰上的高与底边所夹的度数为(　　).

A 35°　B 20°　C 35°或20°　D 无法确定

(2) 一个三角形如果有两边的垂直平分线的交点在第三边上，那么这个三角形是(　　).

A 直角三角形　B 等腰三角形　C 等边三角形　D 无法判定

(3) 若一个三角形的三个内角不等，则它的最小角不能大于(　　).

A 45°　B 60°　C 90°　D 以上都不是

(4) 如图57-1，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，CE为AB上的中线，$\angle BCD:\angle ACD=3:1$，若$CD=5$cm，那么$ED$是(　　).

A 2 cm　B 3 cm　C 4 cm　D 5 cm

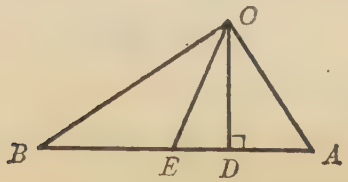


图 57-1

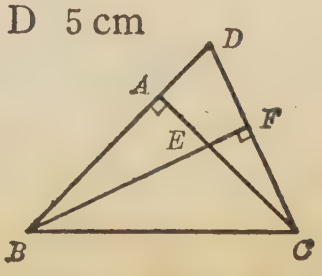


图 57-2

(5) 如图57-2，$\triangle DBC$中，$CA\perp DB$，A为垂足，$BF\perp DC$，F为垂足，$\angle DBC=45°$，$DB=7$，$DA=2$，CA、BF相交于E，则EC的长是(　　).

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

2. 填空题：

(1) 如图57-3，在$\triangle ABC$中，AD、BE、CF分别是它的三条高且$AD:BE:CF=m:n:p$，$BC=a$，那么$AC=$____，$AB=$____.

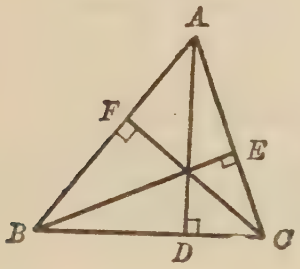


图 57-3

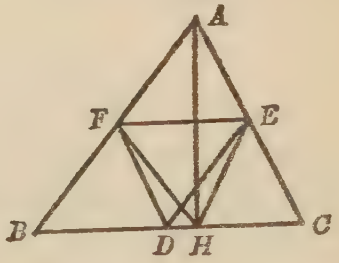


图 57-4

(2) 如图57-4，$\triangle ABC$中，$AH\perp BC$于H，D、E、F分别为三边中点，那么$\triangle DEF$周长____$\triangle HEF$周长.

(3) 在$\triangle ABC$中，$AB=AC=10$，$\angle A=10\angle B$，那么AB边上的高为____.

(4) 正三角形的面积为$4\sqrt{3}$，则边长为____，高为____，内切圆半径为____，外接圆半径为____.

(5) 一个等腰三角形的周长是18cm，底边长比底边上的高的2倍还多2cm，则这个三角形的底边长为____.

3. 证明题：

(1) 如图57-5，C点是线段AB上一点，$\triangle ACD$和$\triangle CBE$都是正三角形且在AB的同侧，取AE、BD的中点M、N，

则 $\triangle CMN$ 是正三角形.

(2) 如图 57-6,已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形,延长 BC 到 D,延长 BA 到 E,并且使 $AE=BD$,连结 CE、DE. 求证:$EC=DE$.

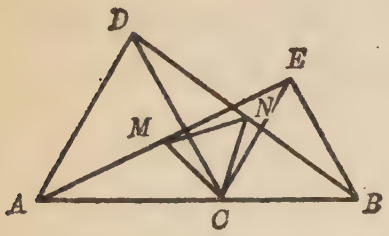


图 57-5

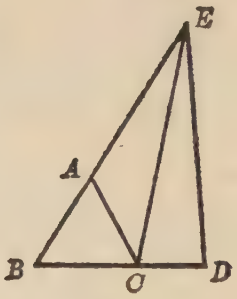


图 57-6

(3) 如图 57-7,已知 E 是正方形 $ABCD$ 的边 CD 的中点,F 是 CE 的中点. 求证:$\angle BAF=2\angle DAE$.

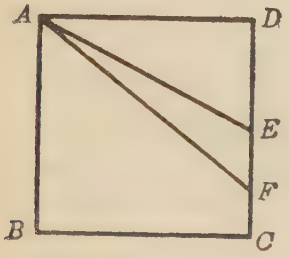


图 57-7

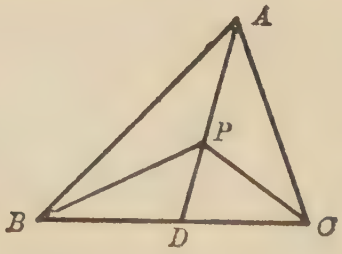


图 57-8

(4) 如图 57-8,在 $\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,AD 为 $\angle A$ 的平分线,P 为 AD 上任意一点.求证:$PB-PC<AB-AC$.

(5) 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,$CH\perp AB$,H 为垂足,AT 为 $\angle BAC$ 的平分线交 CH 于 D,交 BC 于 T,$DE\parallel AB$ 交 CB 于 E. 求证:$CT=BE$.

四、四 边 形

这部分内容分4天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表5.

第58天 平行四边形

复习要求:

1. 掌握平行四边形的概念、性质和判定;

2. 能应用性质证明线段与角的相等和两直线平行.

例1 下列各条件中能确定一个四边形是平行四边形的是(　　).

A 一组对边平行,另一组对边相等

B 一组对边平行,且两条对角线相等

C 一组对边平行,且一组对角相等

D 一组对边相等,且两条对角线相等

E 两条对角线互相垂直且一条被另一条平分

分析:根据条件可以分别画出A、B、C、D、E的图象如下(如图58-1).

容易证明,C是正确的.

筛选法和图象法是解选择题的常用方法.

例2 如图58-2,已知$\square ABCD$中,$AE\perp BD$,$CF\perp BD$,E、F为垂足,G、H分别是AD、BC的中点. 求证:四边形$EHFG$是平行四边形.

证明 $\because$ $AE\perp BD$,G为AD中点,

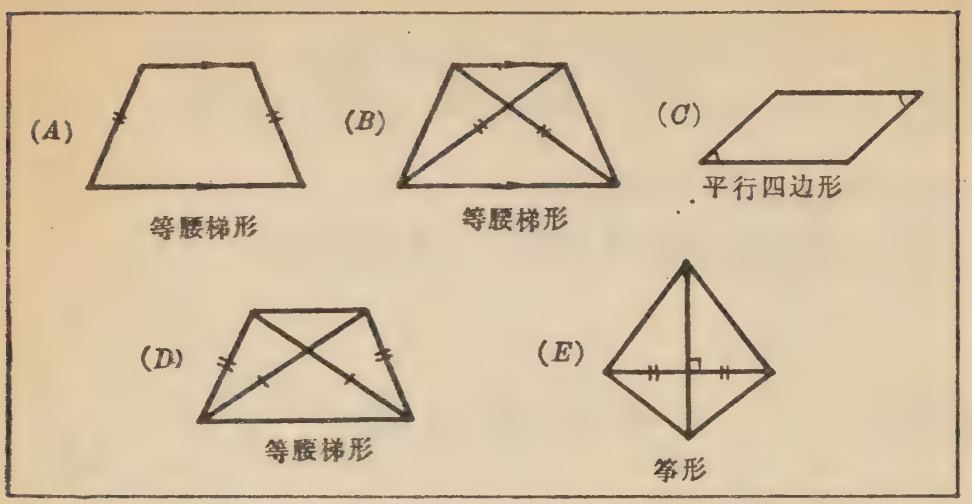


图 58-1

$\therefore GE=GD=\frac{1}{2}AD$,

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

同理：$HF=BH=\frac{1}{2}BC$,

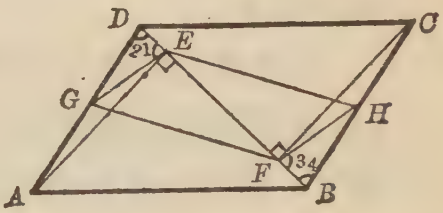


图 58-2

$\angle 3=\angle 4$.

$\because$ $ABCD$是平行四边形，$\therefore$ $AD\parallel BC$.

$\therefore GE=HF$，$\angle 2=\angle 4$，$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because \angle GEF=180°-\angle 1$，$\angle HFE=180°-\angle 3$.

$\therefore \angle GEF=\angle HFE$. $\therefore GE\parallel HF$.

$\because GE=HF$，$\therefore EHFG$是平行四边形.

本题证明方法比较多，例如可用“对角线互相平分的四边形是平行四边形”来证明，请同学不妨试试.

例 3 如图 58-3，已知 $\square ABCD$，以 AC 为边长在两侧各作一个正三角形$\triangle ACP$、$\triangle ACQ$. 求证：$\angle BPD=\angle DQB$.

证明 连结 BD 交 AC 于 O，连结 PO、OQ.

$\because ABCD$是平行四边形，$\therefore AO=OC$，$BO=OD$.

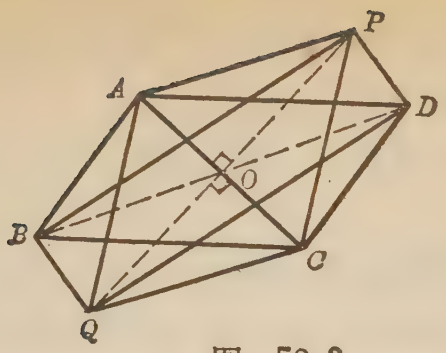


图 58-3

又∵ $\triangle APC$、$\triangle ACQ$ 是正三角形，

∴$PO \perp AC$，$QO \perp AC$，

∴P、O、Q 在同一直线上.

在 $\triangle AQP$ 中，$AP = AQ$，$AO \perp PQ$，∴$QO = PO$.

∵$BO = OD$，∴四边形 $BPDQ$ 是平行四边形，$\angle BPD = \angle DQB$.

利用“平行四边形对角相等”的性质可以证明两个角相等.

同样，利用“平行四边形的对边相等，对角线互相平分”可证明线段相等；利用“平行四边形对边平行”可证明两直线平行.

练习五十八

1. 选择题：

(1) 如果一个多边形的内角和，等于这个多边形的外角和，那么这个多边形的边数是(　　).

A 3　　B 4　　C 5　　D 6

(2) 已知 $\square ABCD$ 的一边长为 12，则对角线 AC、BD 的长，可取下列各组数中的(　　).

A 8、10　　B 9、11　　C 10、12　　D 11、14

(3) 若用两个全等的不等边三角形拼合成各种平行四边形，其中形状不同的有(　　)。

A 四种　　B 三种　　C 二种　　D 一种

2. 填空题：

(1) $\square ABCD$ 的周长为 60cm，AC、BD 相交于 O，$\triangle OAB$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长大 8 cm，则平行四边形的长边长____，短边长_____。

(2) 如图 58-4，$\square ABCD$ 中，$AC=6$ cm，E、F 分别是 AB、CD 的中点，$GH=$____cm。

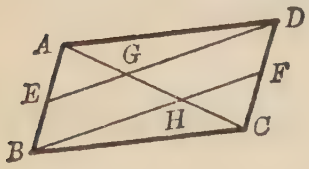


图 58-4

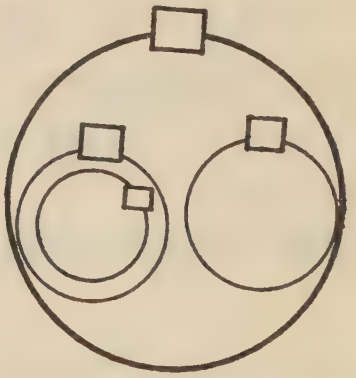


图 58-5

(3) $\square ABCD$ 中，$\angle A$ 的 2 倍与 $\angle B$ 的补角的和为 90°，那么 $\angle A$ 为____，

(4) 如图 58-5，设：A=多边形集合，B=平行四边形集合，C=四边形集合，D=三角形集合。

试在集合关系图的方框内填入适当的字母。

3. 证明题：

(1) 已知 $\square ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O 点，E、F、G、H 分别为 AB、OC、CD、OA 的中点，求证：$EFGH$ 是平行四边形。

(2) 已知 $\square ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 的平分线相交于 O，BO

与 AD 的延长线交于 E.求证：$OB=OE$.

(3) 如图 58-6,已知 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的中线，自 F 引 $FM \parallel BE$，自 E 引 $EM \parallel BA$，EM 与 FM 交于 M. 求证：$AM=DC$.

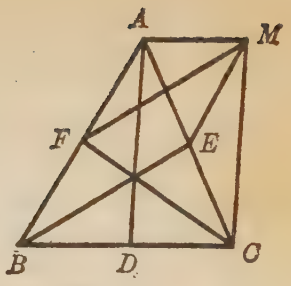


图 58-6

第 59 天　特殊平行四边形

复习要求：

1. 掌握矩形、菱形、正方形的概念，了解概念之间的联系与区别；

2. 掌握这几种特殊平行四边形的性质和判定方法.

例 1 如图 59-1,矩形 $ABCD$ 的对角线交于 O,$OF \perp AD$,$AE \perp BD$,F、E 为垂足,$BE=\frac{1}{3}ED$,$OF=4$,求(1) $\angle ADB$ 的度数，(2) AE 的长.

解 $\because BE=\frac{1}{3}DE$, $\therefore BE=\frac{1}{4}BD$.

$\because ABCD$ 是矩形,$\therefore AC=BD$ 且 $BO=OD$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}BO$.

即 E 为 BO 的中点.

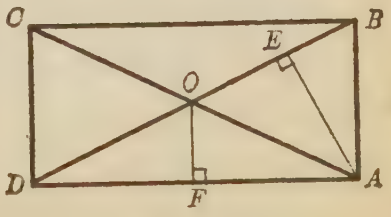


图 59-1

又 $\because AE \perp BD$, $\therefore AB=AO=\frac{1}{2}AC=BO$.

$\therefore \angle DBA = 60°, \therefore \angle ADB = 30°$.

(2) $\because OF \perp DA, BA \perp DA, \therefore OF \parallel BA$,

$DO = OB, \therefore DF = FA$. $\therefore OF = \frac{1}{2} AB$.

$\because OF = 4, \therefore AB = 8$.

$\therefore AE = 8\sin 60° = 4\sqrt{3}$.

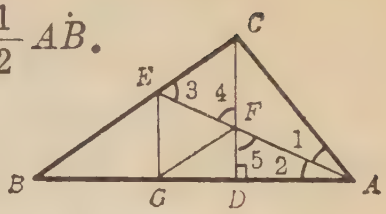


图 59-2

例 2 如图 59-2，在 $Rt\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，$\angle A$ 的平分线 AE 交 CD 于 F，交 BC 于 E，$EG \perp AB$，G 为垂足，求证：$CFGE$ 是菱形.

证明 $\because \angle 1 = \angle 2$，

$CE \perp AC, EG \perp AB$,

$\therefore EG = CE$.

$\because \angle 1 + \angle 3 = 90°, \angle 2 + \angle 5 = 90°, \angle 4 = \angle 5$,

$\therefore \angle 3 = \angle 4, \therefore CE = CF$.

$\because CE = EG, \therefore CF = EG$.

$\because CF \perp AB, EG \perp AB, \therefore CF \parallel EG$. $\therefore CFGE$ 是平行四边形.

又 $\because CE = EG, \therefore CFGE$ 是菱形.

此题还可先证 $\square CFGE$，再证 $EF \perp CG$；

或先证 $\square CFGE$，再证 EF 平分 $\angle CFG$；

或证明 $CE = FG = GE = CE$.

例 3 如图 59-3，已知 $ABCD$ 是正方形，$BF \parallel AC$，$AEFC$ 是菱形. 求证：$\angle ACF = 5\angle F$.

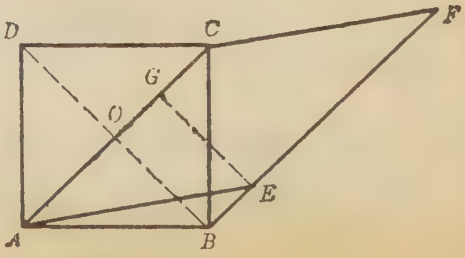


图 59-3

证明 连结 BD 交 AC 于 O，

则 $BO \perp AC$，且 $BO = \frac{1}{2} AC$，

过 E 作 $EG \parallel BO$ 交 AC 于 G，则 $EG = BO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AE$.

$\therefore \angle EAC = 30°$.

$\because AEFG$ 是菱形，$\therefore \angle F = \angle EAG = 30°$.

$\because CF \parallel AE$，$\angle ACF = 180° - 30° = 150°$，$\therefore \angle ACF = 5\angle F$.

练习五十九

1. 选择填空：

(1) 两条对角线____的平行四边形是矩形；

两条对角线____的四边形是矩形；

两条对角线____的平行四边形是菱形；

两条对角线____的四边形是菱形；

两条对角线____的平行四边形是正方形.

A 互相垂直　B 相等　C 互相垂直且相等　D 互相平分且相等　E 互相垂直平分　F 互相垂直平分且相等

(2) 如图 59-4，在方框中选填备选答案前的字母.

A 四边形集合　B 正方形集合　C 平行四边形集合　D 矩形集合　E 菱形集合

(3) 下列图形中，是中心对称图形，而不是轴对称图形的是(　　).

A 平行四边形　B 矩形　C 菱形　D 正方形　E 等腰梯形

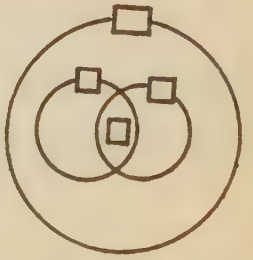


图 59-4

2. 填空题：

按下列条件构成四边形是什么四边形？

(1) 任意四边形各边中点的连线构成____；

(2) 平行四边形各边中点的连线构成____；

(3) 矩形各边中点的连线构成____；

(4) 菱形各边中点的连线构成____；

(5) 正方形各边中点的连线构成____；

(6) 平行四边形各内角平分线交点的连线构成____；

(7) 矩形内角平分线的交点的连线构成____.

3. 证明题：

(1) 已知 AC是 $\square ABCD$的对角线，AC 的垂直平分线分别交 BC、AD 于E、F. 求证：四边形 $AECF$ 是菱形.

(2) 如图 59-5，已知 $\triangle ABC$ 中$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$的平分线交于点 D，$DE\perp BC$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F. 求证：$CEDF$ 是正方形.

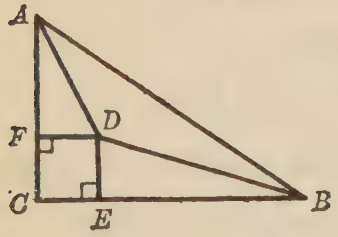


图 59-5

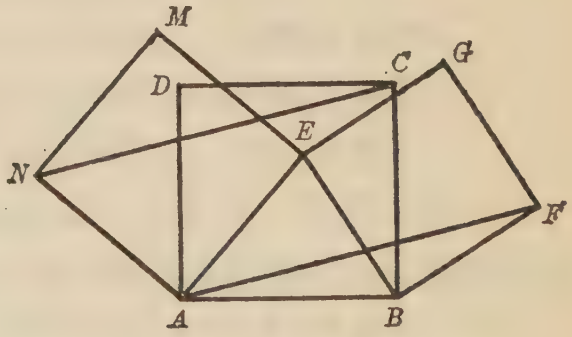


图 59-6

(3) 如图 59-6，在正方形 $ABCD$ 内任取一点 E，连 AE、BE，在 $\triangle ABE$ 外分别以 AE、BE 为边作正方形 $AEMN$ 和 $EBFG$，连 NC、AF. 求证：$NC\parallel AF$.

第 60 天　　梯　　形

复习要求：

1. 掌握梯形的概念，等腰梯形的性质和判定；

2．掌握平行线等分线段定理，三角形、梯形中位线定理及其逆定理；

3．了解三角形、平行四边形、梯形之间的联系和区别，并能应用这些知识分析问题、解决问题．

例 1 连结梯形两条对角线中点的线段平行于两底且等于两底差的一半．

如图 60-1，已知在梯形 $ABCD$ 中，E 是 AC 的中点，F 是 BD 中点．求证：$EF\perp\!\!\!\perp\frac{1}{2}(AB-CD)$．

分析：E、F 为 AC 和 BD 的中点，但它们不在同一个三角形内，不能用三角形中位线定理，现设法把它放在一个三角形内且成为中位线．连接 CF 并延长交 AB 于 G 即可证得．

证明过程由同学完成．

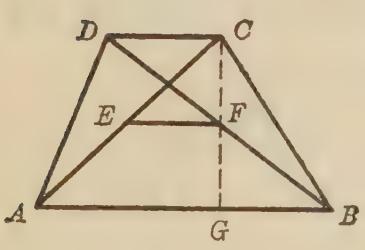


图 60-1

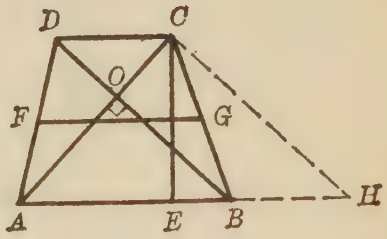


图 60-2

例 2 如图 60-2，已知在梯形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，$AD=BC$，$CE\perp AB$，E 为垂足，$CE=m$，$AC\perp BD$，O 为垂足，求中位线 FG 的长．

解 过点 C 作 $CH\parallel BD$ 交 AB 的延长线于 H．

$\because CD\parallel BH$，$CH\parallel BD$，$\therefore BHCD$ 是平行四边形．

又 $\because AD=BC$，$\therefore AC=BD$．

$\therefore AC=CH$，$AC\perp BD$，$CE\perp AB$，

$\therefore AC \perp CH, \therefore AH = 2CE = 2m.$

$\therefore\ GF = \frac{1}{2}(AB+CD) = \frac{1}{2}AH = m.$

解决梯形问题往往需要添加辅助线，常用的添线方法有以下几种：

① 过上底两端点，向下底作垂线(如图 60-3)；

图 60-3

图 60-4

② 过上底一端点，作一腰的平行线(如图 60-4)；

③ 过上底一端点，作一对角线的平行线(如图 60-2)；

④ 过一腰的中点，作另一腰的平行线(如图 60-5)；

图 60-5

图 60-6

⑤ 连结上底一端和一腰中点的直线，与下底延长线相交(如图 60-6)。

练 习 六 十

1. 选择题：

(1) 在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，$AB > CD$，$AD = BC$，BD 平分 $\angle B$，$\angle A = 60°$，周长为 15cm，则梯形的各边长为(　　)cm。

A 3、3、4、5　　B 3、3、3、6

C 4、4、4、6　　D 3、4、5、6

(2) 等腰梯形两底的差等于一腰的长，那么它的腰与下底的夹角是(　　).

A 30°　　B 45°　　C 60°　　D 75°

(3) 梯形的下底的长是 b，中位线的长为 m，那么这个梯形的上底的长是(　　).

A $m-b$　B $m-\frac{b}{2}$　C $m+\frac{b}{2}$　D $2m-b$

(4) 如图 60-7，$AB \parallel EF \parallel MN \parallel DC$，$DM=ME=EA$ 且 $BC=5$ cm，$AB=8$ cm，则 EF 等于(　　).

A 7cm　B 6cm　C 6.5cm

D 5.5cm

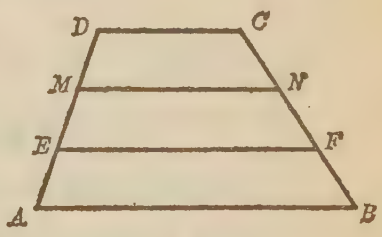


图 60-7

2. 填空题：

(1) 梯形中位线长 30cm，被一条对角线分成两段，这两段的差为 5 cm，梯形两底分别长为____.

(2) 等腰梯形中位线长等于 15cm，一个底角是 60°，且对角线平分这个角，则这个梯形的周长是____.

(3) 等腰梯形各边中点的连线所构成的图形是____.

(4) 对角线互相垂直的等腰梯形各边中点连线所构成的图形是____.

3. 证明题：

(1) 已知在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle B+\angle C=90°$，E、F 分别是底边 AD、BC 的中点. 求证：$EF=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

(2) 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，并且 $AD+BC=AB$，F 是 CD 的中点. 求证：$AF \perp BF$.

第61天　练习六十一

1. 选择题：

(1) 一个凸多边形的内角和等于1800°，则此多边形的边数为(　　).

A 6　B 8　C 10　D 12

(2) 下列图形中既是轴对称图形又是中心对称图形的是(　　).

A 平行四边形　B 梯形　C 菱形　D 等腰三角形

(3) 下列五个命题中真命题是(　　).

A 两条对角线相等的四边形是平行四边形

B 两条对角线互相垂直平分的四边形是正方形

C 两条对角线互相垂直且相等的四边形是菱形

D 两条对角线相等且互相平分的四边形是矩形

E 四边都相等的四边形是正方形

(4) 梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，则 $\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 可能等于(　　).

A 3:5:6:4　B 4:5:6:3　C 3:4:5:6

D 6:5:4:3

(5) 梯形的下底为 a，上底为 $b(a>b)$，若梯形的中位线将梯形分成上下两部分的面积的比为1:2，则 $a:b$ 等于(　　).

A 5:1　B 4:1　C 1:5　D 2:1

2. 填空题：

(1) 若凸多边形的边数增加1，则其内角和增加____.

(2) 六边形共有____条对角线.

(3) 已知，矩形$ABCD$中，$AP\perp BD$，P为垂足，$BP:PD=1:3$，AC、BD交于O，则$\angle AOB$的度数是____.

(4) 梯形两底之比为5:3，差为2.2，则中位线长为____.

(5) 菱形的一条边是两条对角线的比例中项，则菱形的一个锐角为____.

3. 证明题：

(1) 如图61-1，已知在$\square ABCD$中，直线$EF\parallel AB$分别交AD、BC于E、F，AF、CE分别交BE、DF于M、N，求证：$MN=\frac{1}{2}BC$.

(2) 正方形$ABCD$的对角线AC和BD交于O点，$BE\parallel CA$，且$CE=CA$，CE交AB于F，求证：$AE=AF$.

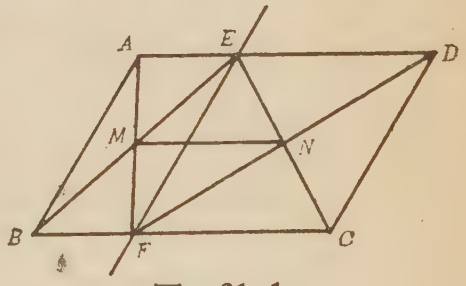


图 61-1

五、多边形面积

这一部分的主要内容及其相互关系见下页图.

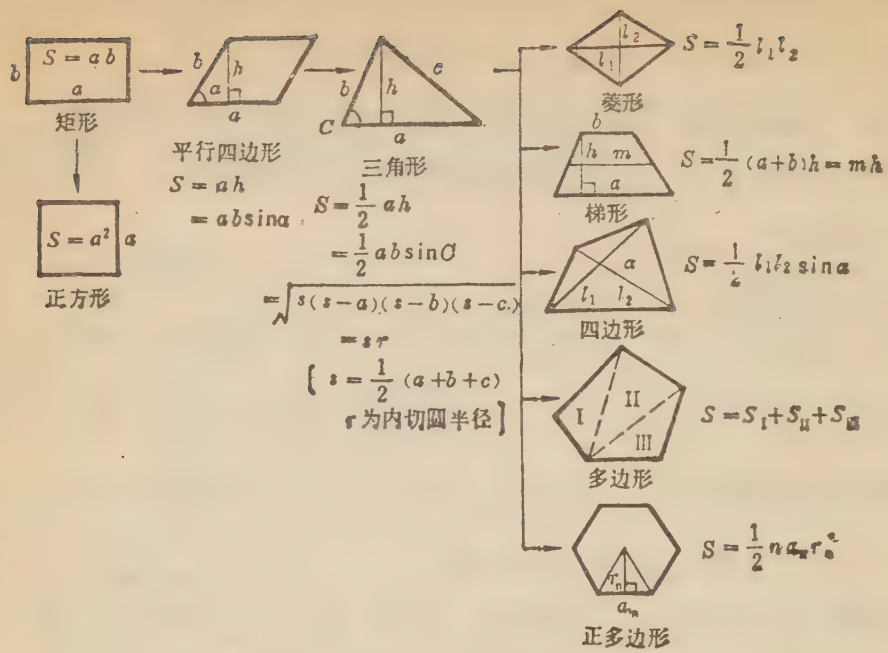
第62天　三角形、四边形面积

复习要求：

1. 熟悉三角形面积公式及各种特殊四边形面积公式；

2. 会用面积割补法求多边形的面积；

3. 能根据等底等高的三角形面积相等的性质，把四边形变为等积三角形.



平行线之间的距离

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow d_1 = d_2$

等底等高的三角形面积

$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow S_{\triangle AP_1B} = S_{\triangle AP_2B}$

例 1 证明以梯形一腰的中点及其另一腰的两端为顶点的三角形面积等于原梯形面积的一半.

如图 62-1, 已知在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 为 CD 的中点. 求证: $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形 } ABCD}$

证法一 过 E 作 $EF \parallel BC$ 交 AB 于 F, 作高 AG 交 EF 于 H, 则 $S_{\text{梯形 } ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)AG = EF \cdot AG$.

$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle AEF} + S_{\triangle EBF}$

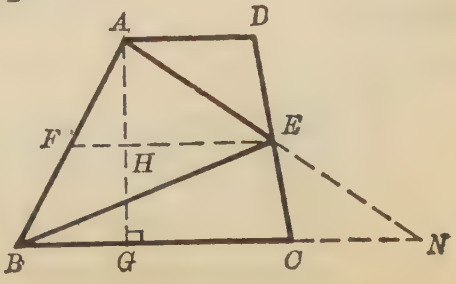


图 62-1

$$= \frac{1}{2} EF \cdot AH + \frac{1}{2} EF \cdot HG = \frac{1}{2} EF(AH + HG)$$

$$= \frac{1}{2} EF \cdot AG.$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形 } ABCD}.$$

证法一用的是面积分割法.

证法二 延长 AE 交 BC 的延长线于 N,如图 62-1,则 $\triangle ADE \cong \triangle NCE$, $\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle NCE}$.

$$\therefore S_{\text{梯形 } ABCD} = S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} BN \cdot AG.$$

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABN} - S_{\triangle BEN}$$

$$= \frac{1}{2} BN \cdot AG - \frac{1}{2} BN \cdot \frac{1}{2} AG$$

$$= \frac{1}{4} BN \cdot AG$$

$$= \frac{1}{2} S_{\text{梯形 } ABCD}.$$

证法二是用了面积割补法,将梯形 $ABCD$ 割补为等积的三角形 ABN,这是证明面积问题的基本方法.

例 2 如图 62-2 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 中点, N 是 AD 中点, M 是 BN 中点, P 是 MC 中点.

求证: $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{8} S_{\triangle ABC}$.

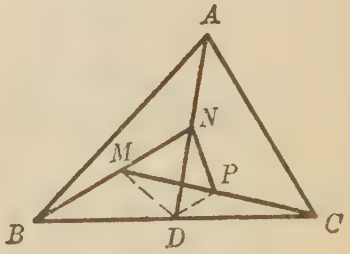


图 62-2

证明 连结 MD、PD.

$\because$ D 是 BC 中点, $\therefore$ $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

$\because$ N 是 AD 中点, $\therefore$ $S_{\triangle BDN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$.

又 ∵ M 是 BN 中点，∴ $S_{\triangle MDN}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDN}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$。

∵ P 是 MN 中点，D 是 BC 中点，

∴ $DP \parallel BM$，$S_{\triangle MNP}=S_{\triangle MDN}$。

∴ $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{8}S_{\triangle ABC}$。

这个例题应用两个等高的三角形面积之比等于它们两底之比及同底等高的两个三角形等积，这些都是解决有关三角形面积问题的常用方法。

练习六十二

1．选择题：

(1) 一个直角三角形的周长是 $2+\sqrt{6}$，斜边上中线长是 1，这个三角形的面积是(　　)。

A $\frac{3}{4}$　B $\frac{1}{2}$　C 1　D $\sqrt{2}$

(2) 如图 62-3，G 是 $\triangle ABC$ 的重心，若 $S_{\triangle ABC}=6\ \text{cm}^2$，则 $\triangle BDG$ 的面积是(　　)。

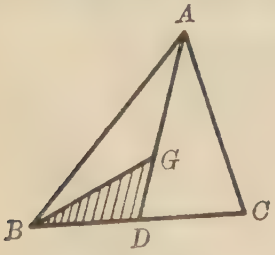


图 62-3

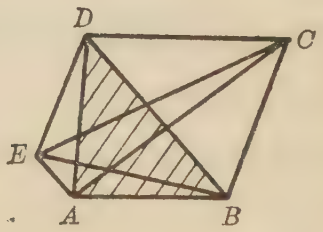


图 62-4

A $\frac{4}{3}\text{cm}^2$　B $1\ \text{cm}^2$　C $2\ \text{cm}^2$　D 以上答案都不对

(3) 如图 62-4，$AB \parallel DC$，$ED \parallel BC$，$AE \parallel BD$，那么图中和 $\triangle ABD$ 面积相等的三角形个数(不包括 $\triangle ABD$)为(　　)。

A 1　B 2　C 3　D 4

(4) 梯形$ABCD$的面积被对角线分成3:7两部分，这个梯形被中位线分成两部分的面积之比为(　　).

A 5:6　　B 4:5　　C 3:4　　D 2:3

2. 填空题：

(1) 平行四边形$ABCD$的周长为$2p$，两邻边上的高分别为h_1、h_2，这个平行四边形的面积为_____.

(2) 菱形的一边与等腰直角三角形的一直角边等长，若菱形的一个角是30°，则菱形和三角形的面积比是_____.

(3) 矩形$ABCD$中，$AD=5\text{cm}$，$AB=12\text{cm}$，O为对角线AC、BD的交点，E为BC延长线上一点，且$CE=AC$，则$S_{\triangle OCE}=$_____.

3. 如图62-5，$AB\parallel GE$，$CD\parallel FG$，$BE=EF=FC$，$S_{\triangle AEG}=7$，求$S_{四边形AEFD}$.

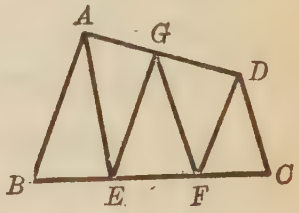


图 62-5

4. 已知在$\triangle ABC$的三条边上，分别取$AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$，$CF=\frac{1}{3}CA$. 求证：$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$.

六、相　似　形

本单元分4天复习.

主要内容及其相互关系见插表6.

第63天　　比例线段

复习要求：

1．掌握比例的有关性质，并能熟练地进行比例的变形；

2．理解比例线段的概念，掌握平行线分线段成比例定理及其推论、推论的逆定理；

3．掌握三角形角平分线性质定理及其应用．

例 1 （1）求 4 与 9 的比例中项．

（2）$x:y:z=1:3:5$，求 $\dfrac{x+3y-z}{x-3y+z}$．

解 （1）设所求的比例中项为 x，

则 $x^2=4\times 9=36$ ∴ $x=\pm 6$．

（2）设比值为 k，则 $x=k, y=3k, z=5k$

$$\frac{x+3y-z}{x-3y+z}=\frac{k+9k-5k}{k-9k+5k}=\frac{5k}{-3k}=-\frac{5}{3}.$$

此题也可用等比性质来解，但没有这种方法简便．

例 2 如图 63-1，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别在 BC、AC 上，且使得 $DC:BD=1:3$，$AE:EC=2:3$，AD 与 BE 交于 F．求 $AF:FD$．

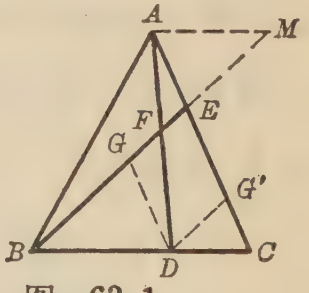


图 63-1

解 过 D 作 $DG\parallel AC$，交 BF 于 G，

则 $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{DG}$，$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{DG}{EC}$．

∵ $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{3}{1}$，∴ $\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{3}{4}$，

∴ $\dfrac{DG}{EC}=\dfrac{3}{4}$，$DG=\dfrac{3}{4}EC$，

∵ $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{AE}{\frac{3}{4}EC}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{AE}{EC}$，$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{2}{3}$，

∴ $\dfrac{AF}{FD}=\dfrac{8}{9}$．

求同一条直线上的两条线段比的问题，一般可以过它们的三个端点（如 A、F、D）中任一点引出一组平行线，把所求线

段的比转移到另一直线上去．而添线能否成功关键是看所作的平行线能否将“所求线段比”与“已知线段比”沟通．根据这一规律，此题还可“过 D 作 $DG' \parallel BE$ 交 AC 于 G'”；“过 A 作 $AM \parallel BC$ 与 BE 的延长线交于 M”等．

例 3 如图 63-2，已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的内角平分线为 AK，外角平分线交 BC 的延长线于 H，求证：

$$\frac{1}{BK}+\frac{1}{BH}=\frac{2}{BC}.$$

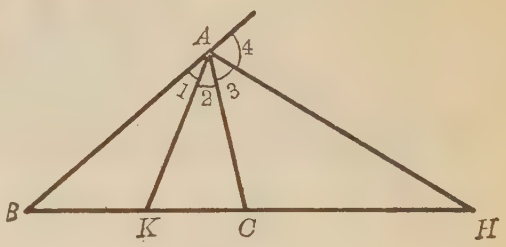


图 63-2

证明 $\angle 1=\angle 2 \Longrightarrow \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{KC}{BK}$

$\angle 3=\angle 4 \Longrightarrow \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{HC}{BH}$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \dfrac{AB+AC}{AB}=\dfrac{BC}{BK}\\ \Longrightarrow \dfrac{AB-AC}{AB}=\dfrac{BC}{BH}\end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{BC}{BK}+\frac{BC}{BH}=2$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{BK}+\frac{1}{BH}=\frac{2}{BC}.$$

三角形内(外)角平分线性质定理，是论证比例线段常用的一种重要方法．使用时要注意，第三边上被内(外)角平分线内(外) 分点所形成的两线段比的规律是：一端点 ⟶ 内(外)分点⟶另一端．

练习六十三

1．选择题：

(1) 已知 $5y-4x=0$，则 $(x+y):(x-y)$ 等于(　　)．

A $\frac{1}{9}$　　B -9　　C 9　　D $-\frac{1}{9}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2AC$，AD、AE 分别是 $\angle A$ 的内角平分线和外角平分线，则 $DC:DB:BC:DE$ 为(　　).

A 1:2:3:4　B 4:3:2:1　C 1:3:2:4　D 1:4:2:3

(3) 如图 63-3，已知 G 是 BC 的中点，E 是 AG 的中点，CE 的延长线交 AB 于 D，则 $EC:DE$ 是(　　).

A 2　　B 3　　C $\frac{1}{3}$　　D $\frac{1}{2}$

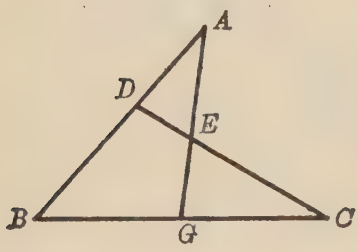


图 63-3

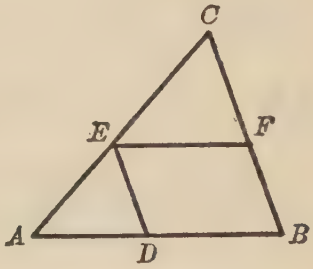


图 63-4

(4) 如图 63-4，已知 $DE \parallel BC$，$EF \parallel AB$. 下列比例式正确的是(　　).

A $\frac{AD}{DB}=\frac{BF}{FC}$　　B $\frac{AE}{EC}=\frac{CF}{FB}$

C $\frac{AD}{DB}=\frac{DE}{BC}$　　D $\frac{DE}{BC}=\frac{EF}{AB}$

2. 填空题：

(1) 已知 x 为 a、b 的比例中项，$x=2\sqrt{10}$，$a-b=3$，则 $a=$____，$b=$____.

(2) 若 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$，$a-b+c=8$. 则 $a=$____，$b=$____，$c=$____.

(3) 如图 63-5，已知 $DC \parallel EF \parallel GH \parallel AB$，$AB=30$，

$CD=6$ 且 $DE:EG:GA=1:2:3$。

则 $EF=$____，$GH=$____。

3. 已知 $\square ABCD$ 中，$PQ\parallel AD$ 交 DC 于 Q，交 AB 于 P，E、F 是 PQ 上任意两点，且 CE 和 BF 的延长线相交于 G，DE 和 AF 的延长线相交于 H，求证：$HG\parallel AB$。

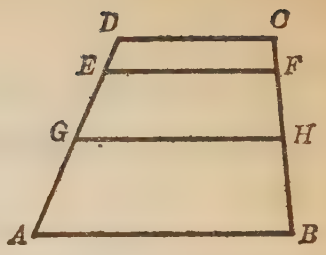


图 63-5

第 64 天　　相似三角形

复习要求是理解相似形的概念，掌握相似三角形的判定与性质。

例 1　如图 64-1，已知 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

求证：$\triangle ABD\backsim\triangle ACE$。

证明　在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，

$\therefore\ \triangle ABC\backsim\triangle ADE$。

$\angle BAC=\angle DAE$。　$\therefore\ \angle 1=\angle 2$，

$\therefore\triangle ABD\backsim\triangle ACE$。

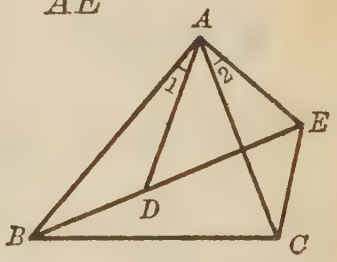


图 64-1

当两个三角形有两边对应成比例时，要证明它们相似，一般可证它们的夹角相等或三边对应成比例。

例 2　如图 64-2，M 为 $Rt\triangle ABC$ 斜边 AB 的中点，过 M 作 AB 的垂线交 AC 于 D，交 BC 延长线于 E，求证：$MC^2=MD\cdot ME$。

分析：要证 $MC^2=MD\cdot ME$

即证$\frac{MC}{MD}=\frac{ME}{MC}$，故只需证 $\triangle MCD\backsim\triangle MEC$，但 $\angle CMD$ 与 $\angle EMC$ 是公共角，所以只要证明 $\angle 1=\angle E$ 即可．而这由已知条件容易证得．请同学写出证明过程．

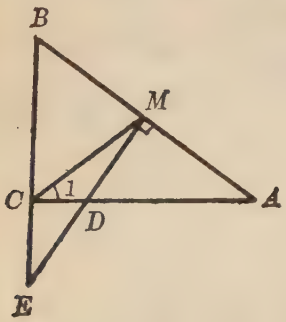


图 64-2

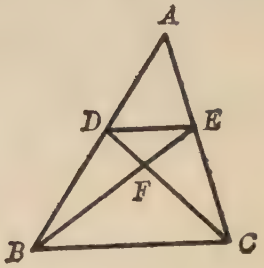


图 64-3

例 3 如图 64-3，已知 $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$，BE 和 CD 交于 F 点，且 $S_{\triangle EFC}=3S_{\triangle EFD}$，求 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}$．

解 $\because\ \frac{S_{\triangle EFD}}{S_{\triangle EFC}}=\frac{1}{3}$，$\therefore\ \frac{FD}{FC}=\frac{1}{3}$．

$\because\ DE\parallel BC$，$\therefore\ \frac{DE}{BC}=\frac{DF}{FC}=\frac{1}{3}$．$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{DE^2}{BC^2}$，$\therefore\ \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{9}$．

这里要区分两种不同的三角形的面积比，即相似三角形的面积比等于相似比的平方及同一边上等高的两个三角形面积比等于两边之比．

练习六十四

1．选择题：

(1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，若 $AB:A'B'=AC:A'C'$，且 $\angle ABC=\angle A'B'C'>90°$，则这两个三角形(　　)．

A 相似而不全等　B 全等　C 全等或相似　D 不一定全等

(2) 两个相似三角形的面积比为 1:3，那么它的对应中线的比为(　　).

A 3:1　B 1:3　C $1:\frac{1}{3}$　D $1:\sqrt{3}$

(3) 如图 64-4，$\triangle ACD$ 和 $\triangle ABC$ 相似的条件是(　　).

A $\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BC}$　B $\frac{CD}{AD}=\frac{BC}{AC}$

C $CD^2=AD\cdot DB$　D $AC^2=AD\cdot AB$

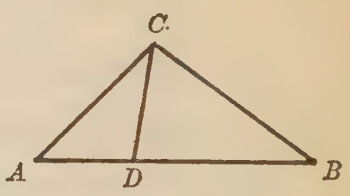


图 64-4

2. 填空题：

(1) 如图 64-5，$\angle 1=\angle 2$，$AB=2AD$，$\angle B=\angle D$，$BC=5$，则 $DE=$____.

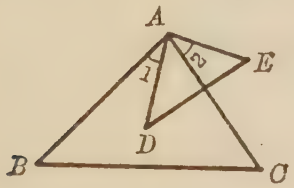


图 64-5

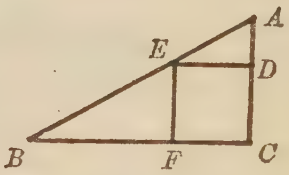


图 64-6

(2) 如图 64-6，$CDEF$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的内接正方形，若 $BC=2$，$AC=1$，则正方形 $CDEF$ 的面积 = ____.

(3) 如图 64-7，在 $\triangle ABC$ 中 $AB=6$，$BC=8$，$CA=7$，延长 CA 至 P，使 $\triangle PBC\backsim\triangle PAB$，则 $AP=$____.

(4) 已知 D、E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上，且 DE 和 BC 不平行，若 $\triangle ABC\backsim\triangle AED$，且 $AD=BD=4$，$AE=5$，则 $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=$_____.

3. 证明题：

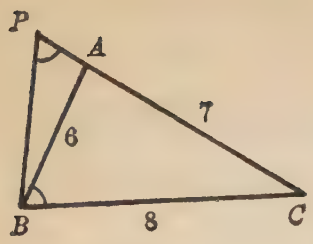


图 64-7

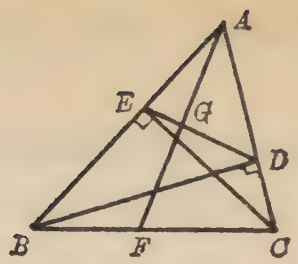


图 64-8

(1) 如图 64-8,已知 $\triangle ABC$ 中,BD 和 CE 分别是 AC、AB 边上的高线,$\angle BAC$ 的平分线 AF 交 BC 于 F,交 DE 于 G,求证:$BF\cdot EG=CF\cdot DG$.

(2) 如图 64-9,已知 $BD=CE$,求证:$\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{AC}{AB}$.

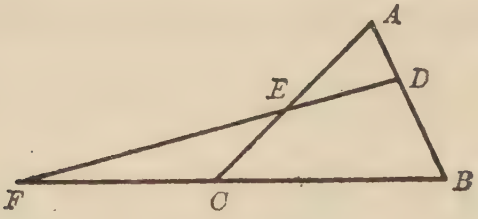


图 64-9

第 65 天　射影定理

复习要求:掌握直角三角形中成比例的线段.并能应用定理解有关直角三角形的计算和证明题.

例 1　已知 $Rt\triangle ABC$ 的周长为 60cm,锐角 $\angle A$ 的平分线 AE 分 CB 为两部分,比为 3:5,求斜边上的高 CD及AD、DB 的长度.

解　如图 65-1,设 a、b、c 分别为 $\triangle ABC$ 的三条边,h 为 AB 边上的高,则 $a+b+c=60$. ∵ $\angle BCA=90°$,$CD\perp AB$,

$\therefore b^2 = AD \cdot c \Longrightarrow AD = \dfrac{b^2}{c}$. 由三角形面积公式得

$\dfrac{1}{2}ch = \dfrac{1}{2}ab \Longrightarrow h = \dfrac{ab}{c}$, 由$\angle 1 = \angle 2$得$\dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{5}$, $\therefore$ 依题意列方程组为

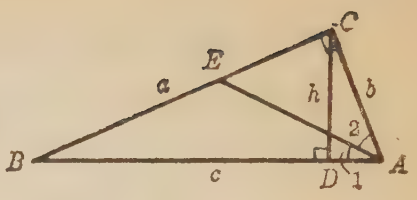


图 65-1

$$\begin{cases} a+b+c=60 & ① \\ \dfrac{b}{c}=\dfrac{3}{5} & ② \\ h=\dfrac{ab}{c} & ③ \\ AD=\dfrac{b^2}{c} & ④ \\ DB=c-AD & ⑤ \end{cases}$$

由②得 $b = \dfrac{3}{5}c$, ⑥

并且 $\dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{9}{25} \Longrightarrow \dfrac{c^2-b^2}{c^2} = \dfrac{16}{25}$ ⑦

$$\Longrightarrow \frac{a}{c} = \frac{4}{5} \Longrightarrow a = \frac{4}{5}c$$

由①、⑥、⑦解得 $c=25$, $a=20$, $b=15$, 代入③、④、⑤解得 $h=12$, $AD=9$, $DB=16$.

由射影定理可得三个有关比例中项的式子，再由面积等式可得 $ab=ch$. 则六条线段 a,b,c,h,AD,BD 之间满足四组比例线段：

$$\begin{cases} a^2 = c \cdot DB \\ b^2 = c \cdot AD \\ h^2 = AD \cdot DB \\ ab = ch \end{cases}$$

已知其中任意两条，可通过以上四组关系解出其余四条

线段.

例 2 如图 65-2，已知 BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的高，过 D 作 $DG\perp BC$ 与 CE 交于 F，GD 的延长线与 BA 的延长线交于 H，求证 $GD^2=GF\cdot GH$.

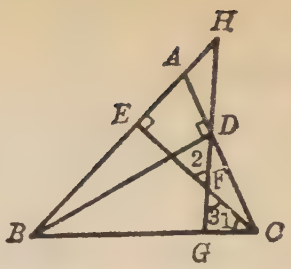


图 65-2

证明 $\left.\begin{array}{l}\angle BDC=90^\circ\\ DG\perp BC\end{array}\right\}\Longrightarrow GD^2=BG\cdot GC$

$$\left.\begin{array}{l}\angle H+\angle 2=90^\circ\\ \angle 1+\angle 3=90^\circ\\ \angle 2=\angle 3\end{array}\right\}\Longrightarrow \angle 1=\angle H\Longrightarrow Rt\triangle BHG\backsim Rt\triangle FCG$$

$$\Longrightarrow\frac{BG}{GF}=\frac{GH}{GC}\Longrightarrow BG\cdot GC=GH\cdot GF\left.\begin{array}{l}\\ \\ GD^2=BG\cdot GC\end{array}\right\}\Longrightarrow GD^2=GF\cdot GH$$

在证明比例式或等积式时往往通过“中间比”或“中间积”进行转化. 这种方法的思路是：

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\qquad ad=bc$$

$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n}\quad\frac{c}{d}=\frac{m}{n}\qquad ad=mn\quad bc=mn$$

练习六十五

1. 选择题：

(1) 如果直角三角形一条直角边的长为 a，这条直角边在斜边上的射影为 b，则斜边长为(　　).

A $\frac{b}{a^2}$　　B $\frac{a^2}{b}$　　C ab　　D $\frac{a}{b}$

*(2) 如图 65-3，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$CD\perp AB$，

$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，$BC=6$ cm，$AC=8$ cm．则 $BF:AE$ 的值是（　　）．

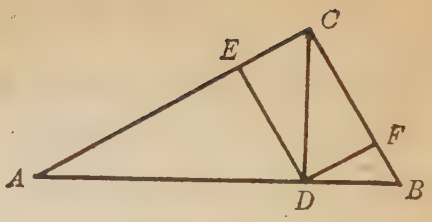


图 65-3

A 81:28　　B 9:16

C 27:64　　D 3:4

2．填空题：

(1) 在 $Rt\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$ 交 AB 于 D，$AD=2$，$DB=8$，则 CD 的长是____，CB 的长是____．

(2) 已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$BC=4$，$AC=3$，CH 是高，CT 平分 $\angle ACB$，则 $CT=$____，$HT=$____．

3．证明题：

(1) 如图 65-4，已知 $AP\perp BP$，$AC\perp BC$，$PF\perp AB$，交 AC 于 E，交 BC 延长线于 F，P、C、D 分别为垂足．求证：$PD^2=DE\cdot DF$．

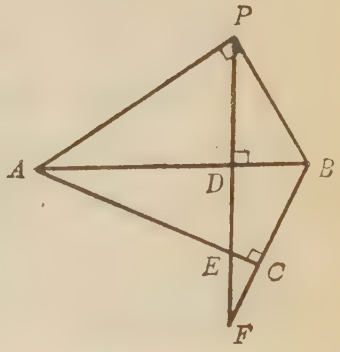


图 65-4

(2) 已知 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，斜边 AB 上的高 $CD=h$．求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$．

第 66 天　练习六十六

1．选择题：

(1) $\triangle ABC$ 中，$DE\parallel BC$．若 $AE=2$，$EC=3$，$DE=1$，则 BC 的长为（　　）．

A $\frac{2}{3}$　　B $\frac{3}{2}$　　C $\frac{5}{2}$　　D 2

(2) 一个直角三角形的两条直角边的比是 1:2，则它们在斜边上的射影的比是(　　).

A 1:2　　B $1:\sqrt{2}$　　C 1:3　　D 1:4

(3) 在一个矩形中剪去一个正方形，若所剩的矩形与原矩形相似，则原矩形长边与短边之比为(　　).

A 3:2　　B $(1+\sqrt{5}):2$

C $(\sqrt{5}-1):2$　　D $(1+\sqrt{6})$

(4) 全等三角形一定是相似三角形的等价命题是(　　).

A 不是全等三角形一定不是相似形

B 相似三角形一定不是全等三角形

C 相似三角形一定是全等三角形

D 不相似的三角形一定不是全等三角形

(5) $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线是 AD，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，$AB=8$，$BC=7$，$AC=6$，则 $ID:IA$ 是(　　).

A 1:2　B 1:3　C 1:4　D 2:3

2. 填空题：

(1) 如图 66-1，$\angle 1=\angle 2$，$BC=2\sqrt{7}$，E 为 AC 上任意一点，且 $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle DEC}=2:3$，则 $BD=$____，$DC=$____.

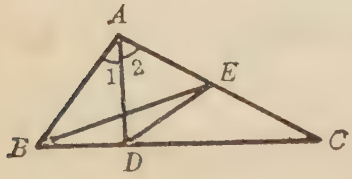


图 66-1

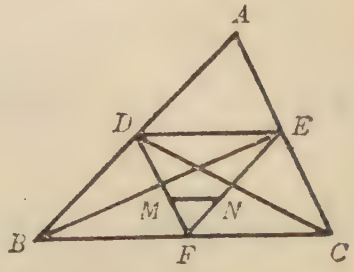


图 66-2

(2) 如图 66-2，在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别是 AB、AC、BC 的中点，M 是 $\triangle DBC$ 的重心，N 是 $\triangle EBC$ 的重心，$BC=$

12，则 $DE=$____，$MN=$____.

(3) 已知 AD 是 $Rt\triangle ABC$ 斜边 BC 上的高，$AC=20$，$BD=9$，则 $CD=$____，$\triangle ABD$ 与 $\triangle CBA$ 的周长比为____，$\triangle ABD$ 与 $\triangle CAD$ 的面积比为____.

(4) 已知在 $\square ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，F 在 AD 上，$AF=\frac{1}{2}DF$，EF 交 AC 于 G，则 $AC:AG$ 的值是____.

3. 证明题：

(1) 如图 66-3，OA 平分 $\angle MON$，B、C 分别是 OM 和 ON 上的一点，且满足 $OA^2=OB\cdot OC$，AD 平分 $\angle OAB$ 交 OB 于 D，CE 平分 $\angle OCA$ 交 OA 于 E，连结 DE. 求证：① $\triangle OCA\backsim\triangle OAB$；② $ED\parallel AB$.

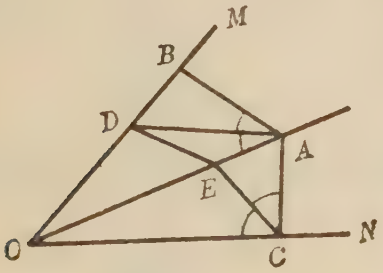


图 66-3

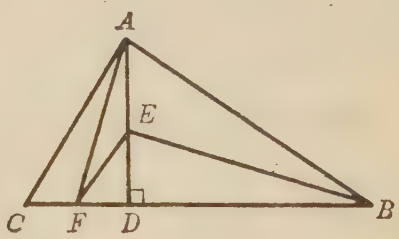


图 66-4

(2) 如图 66-4，已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$AD\perp BC$，D 是垂足，$\angle B$ 的平分线交 AD 于 E，$\angle DAC$ 的平分线交 DC 于 F. 求证：① $AE=EF$；② $BF^2=BD\cdot BC$.

七、圆

本单元分 5 天复习.

本单元的主要内容及其相互关系见插表 7.

第 67 天　点和圆的位置关系

现在开始复习平面几何的另一种重要图形——圆.

复习要求：

1．掌握圆的概念和一些重要性质；

2．能熟练地使用垂径定理，了解圆心角、弧、弦、弦心距的关系.

例 1　如图 67-1，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，CD 是弦，$AE\perp CD$，$BF\perp CD$，E、F 是垂足．若 BF 交半圆于 G，求证（1）$EC=FD$，（2）$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DG}$.

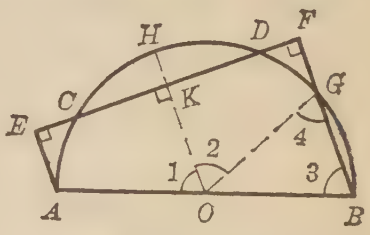


图 67-1

证明　（1）作 $OK\perp CD$ 交半圆于 H，连结 OG，则 $CK=KD$，$\overset{\frown}{CH}=\overset{\frown}{HD}$.

$$\left.\begin{matrix}AE\perp EF\\OK\perp EF\\BF\perp EF\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}AE\parallel OK\parallel BF\\OA=OB\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{matrix}EK=KF\\CK=KD\end{matrix}\right\}\Longrightarrow EC=FD.$$

$$(2)\quad OK\parallel BF\Longrightarrow\left.\begin{matrix}\angle 1=\angle 3\\\angle 2=\angle 4\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\angle 1=\angle 2$$

$$OB=OG\Longrightarrow\angle 3=\angle 4$$

$$\Longrightarrow\left.\begin{matrix}\overset{\frown}{AH}=\overset{\frown}{HG}\\\overset{\frown}{CH}=\overset{\frown}{HD}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DG}.$$

添弦心距作为辅助线，是圆的一种添置辅助线的常用方

法．一般地，证明圆心角、弧、弦和弦心距这四组量中任意一组量相等，常常转化为证明其他三组量之一相等．这是证明有关圆的线段、角和弧相等的基本方法之一．

例 2 如图 67-2，已知 AD、AE 分别是圆内接 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的内角平分线和外角平分线，它们分别交圆于 D 和 E．求证：DE 垂直平分 BC．

证明 $\left.\begin{matrix}\angle 1=\angle 2\\ \angle 3=\angle 4\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \angle EAD=90^\circ$

$$\left.\begin{matrix}\Longrightarrow DE \text{ 是直径}\\ \angle 1=\angle 2\Longrightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DC}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow DE \text{ 垂直平分 } BC.$$

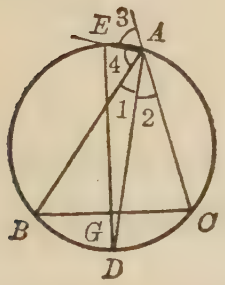


图 67-2

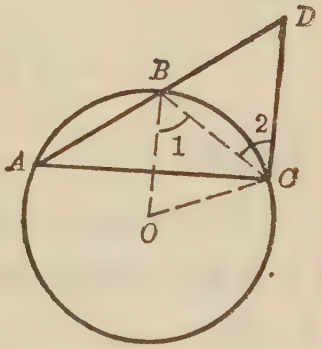


图 67-3

例 3 如图 67-3，已知 $\odot O$ 的半径为 R，$\overset{\frown}{AC}$ 的中点为 B，连结 AB 并延长到 D，使 $BD=AB$，连结 AC、CD．求证：$\dfrac{AB^2}{CD}=R$．

证明 连结 BC、BO、CO．

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}\Longrightarrow \left.\begin{matrix}AB=BC\\ BD=AB\end{matrix}\right\}\Longrightarrow BC=AB=BD$$

$$\Longrightarrow \angle 2=\angle D$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACD=90^\circ \Longrightarrow DC\perp AC\\ \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}\\ BO\text{过圆心}\end{array}\right\}\Longrightarrow BO\perp AC$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow BO\parallel DC\Longrightarrow \angle 1=\angle 2\\ BO=CO\Longrightarrow \angle 1=\angle BCO\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \angle BCO=\angle D\\ \angle 1=\angle 2\end{array}\right\}\Longrightarrow \triangle BOC\backsim\triangle CBD\Longrightarrow \frac{BO}{CB}=\frac{BC}{CD}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow \dfrac{BC^2}{CD}=BO\\ BO=R\\ BC=AB\end{array}\right\}\Longrightarrow \frac{AB^2}{CD}=R.$$

练习六十七

1. 选择题：

(1) 如图 67-4，点 A、B、C 在一直线上，E、D 在 l 外，且任意 4 点不共圆，则这些点最多可以决定圆的个数是（　　）.

A 3　B 4　C 5　D 9

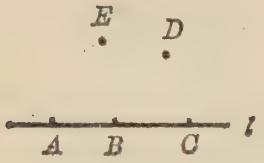


图 67-4

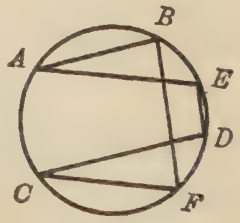


图 67-5

(2) 已知 $\odot O$ 中 AB、CD 是两条平行的弦，$AB=40$，$CD=48$，AB、CD 的距离是 22，则 $\odot O$ 的半径长是（　　）.

A 15　B 20　C 25　D 30

(3) 如图 67-5，已知 $AB\parallel CD$，$AE\parallel CF$，则（　　）.

A BF 与 ED 相交　　B $BF \parallel ED$

C $\angle D = \angle F$　　D $\angle B = \angle E$

(4) 如图67-6，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB = AC$，$\angle A = 40°$，D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，E 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，连结 BD、DE、BE，则 $\triangle BDE$ 的内角的度数分别是(　　).

A 50°,100°,30°　B 55°,105°,20°

C 60°,110°,10°　D 40°,120°,20°

2. 填空题：

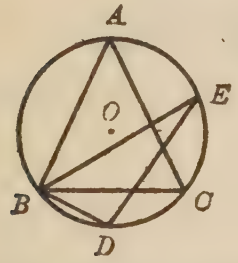


图 67-6

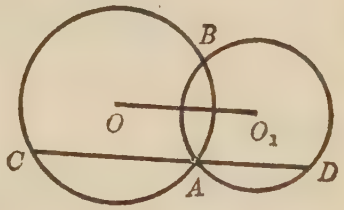


图 67-7

(1) 如图 67-7，已知两圆相交于 A、B，$OO_1 = 5$．割线 $CAD \parallel OO_1$，且 $CA : AD = 3 : 2$，则 $CA =$ ____，$AD =$ ____．

(2) 如图67-8，已知 $\overset{\frown}{BC}$ 的度数是 60°，$AB = AC$，$OD \perp BC$ 且 $\odot O$ 的半径 $R = 5$，则 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数是____，$OD =$ ____．

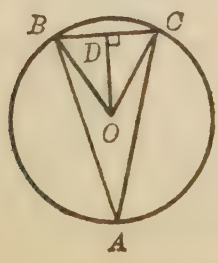


图 67-8

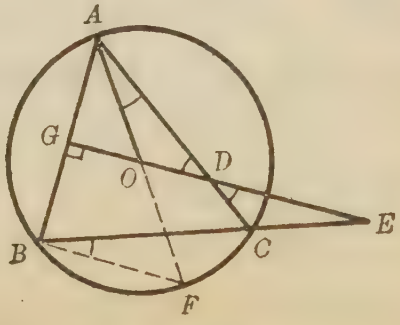


图 67-9

3. 证明题：

(1) 已知 $\odot O$ 上三点 A、B、C，$\overset{\frown}{AB}$ 的中点为 D，$\overset{\frown}{BC}$ 的中点为 E，$\overset{\frown}{AC}$ 的中点为 F. 求证：AE、BF、DC 相交于一点.

(2) 如图 67-9，已知 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，AB 的垂直平分线和 CA 及 BC 的延长线分别交于 D 及 E. 求证：$AD \cdot EC = AO \cdot DE$.

第 68 天　直线和圆的位置关系

复习要求：

1. 掌握直线与圆的位置关系；

2. 掌握切线的判定与性质，切线长定理，弦切角定理；

3. 熟练掌握相交弦定理、切割线定理，并能运用这些知识进行论证、计算和简单作图.

例 1　如图 68-1，D 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的一点，$AD:DC=2:1$，$\angle C=45°$，$\angle ADB=60°$，求证：AB 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的切线.

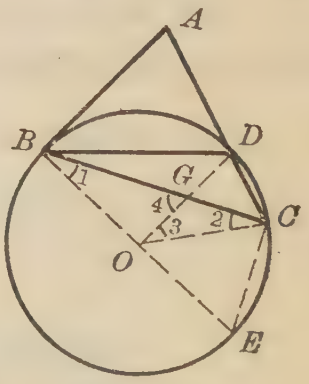


图 68-1

证明　连结 BO 并延长交 $\odot O$ 于 E，连结 DO 交 BC 于 G，连结 CE、OC，则

$$\left.\begin{array}{l} BE \text{ 是直径} \Longrightarrow \angle BCE = 90° \\ B、E、C、D \text{ 四点共圆} \Longrightarrow \angle E = \angle ADB = 60° \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle 1 = 30°$$

$$\left.\begin{array}{l} OB = OC \Longrightarrow \angle 1 = \angle 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \angle 2 = 30°$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB=45^\circ\Longrightarrow\angle BOD=90^\circ\\ \qquad\qquad\angle 1=30^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\angle 4=60^\circ\\ OG=\dfrac{1}{2}BG\Longrightarrow\dfrac{OG}{BG}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle 4=60^\circ\\ \angle 2=30^\circ\end{array}\right\}\Longrightarrow\angle 3=\angle 2=30^\circ\Longrightarrow GO=GC\Bigg\}$$

$$\Longrightarrow\frac{GC}{BG}=\frac{1}{2}$$

$$AD:DC=2:1\Longrightarrow\frac{DC}{AD}=\frac{1}{2}\Bigg\}\Longrightarrow\frac{GC}{BG}=\frac{DC}{AD}$$

$$\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}DO\parallel AB\\ DO\perp BO\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow AB\perp BO\Longrightarrow AB$ 为 $\odot O$ 的切线.

切线的判定方法有三种:

① 直线和圆只有唯一的公共点;

② 圆心到直线的距离等于半径;

③ 过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

第三种判定方法是用得最多的. 在证明过程中如果已知图形没有这条半径,那么就应添上这条半径.

例 2 如图 68-2, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 切 $\odot O$ 于 E, CA 和 DB 都是 $\odot O$ 的切线, AD、BC 相交于 M, EM 延长交 AB 于 F,求证: $EF\perp AB$.

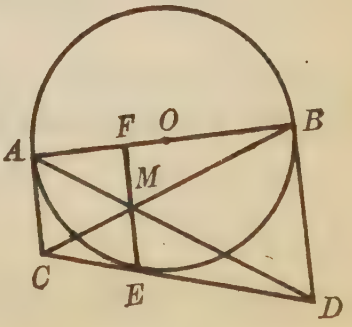


图 68-2

证明 AB 为 $\odot O$ 直径, AC、BD 切 $\odot O$ 于 A、B

$$\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}AC\perp AB\\ BD\perp AB\end{array}\right\}\Longrightarrow AC\parallel BD$$

$$\Longrightarrow \frac{AC}{BD}=\frac{CM}{MB}$$

$$\left.\begin{array}{l} CA、CE\text{ 切 }\odot O\text{ 于 }A、E\Longrightarrow AC=CE \\ DB、DE\text{ 切 }\odot O\text{ 于 }B、E\Longrightarrow BD=DE \end{array}\right\}\Longrightarrow \frac{CE}{DE}=\frac{CM}{MB}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow EF\parallel BD \\ BD\perp AB \end{array}\right\}\Longrightarrow EF\perp AB.$$

此例在证 $AC\parallel BD$ 时用了切线的性质；在证 $EF\parallel BD$ 时用了切线长定理.

例 3 如图 68-3，已知 PA 切 $\odot O$ 于 A，PEC 是 $\odot O$ 的割线，M 是 PA 的中点，MC 交 $\odot O$ 于 B，PB 交 $\odot O$ 于 D. 求证：$DE\parallel PA$.

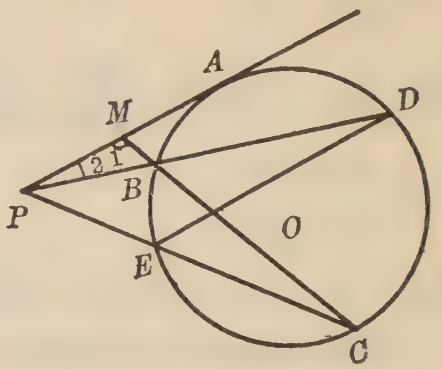


图 68-3

证明

$$\left.\begin{array}{l} AM\text{ 切 }\odot O\text{ 于 }A\Longrightarrow AM^2=BM\cdot MC \\ AM=MP \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow MP^2=MB\cdot MC\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{MP}{MB}=\dfrac{MC}{MP} \\ \angle 1=\angle 1 \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \triangle PMB\backsim\triangle CMP\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \angle 2=\angle C \\ \angle C=\angle D \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \angle 2=\angle D\Longrightarrow DE\parallel AP.$$

切割线定理，可以把有关圆的切线问题转化为线段的积或比的问题.

遇到有关圆的切线问题，常常要用到以下几条定理：

① 切线的性质定理；

② 切线长定理；

③ 弦切角定理的推论；

④ 切割线定理.

在证明或计算时，可以考虑添置以下辅助线：① 连结过切点的半径；② 连结过切点的弦，以构成弦切角.

练习六十八

1. 选择题：

(1) 如图 68-4，P 为 $\odot O$ 外一点，OP 交 $\odot O$ 于 N，PM 切 $\odot O$ 于 M，$PN=6$，$PM=12$，则 $\odot O$ 的半径为(　　).

A 8　B 9　C 10　D 11

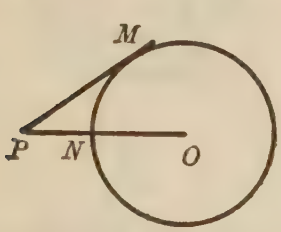


图 68-4

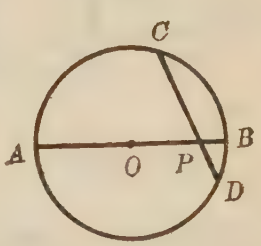


图 68-5

(2) 如图 68-5，直径 $AB=20$，在 OB 上取一点 P，使 $OP=8$，过 P 的弦 CD 被 P 点内分成 4:9. 则弦 CD 的长为(　　).

A 10　B 12　C 13　D 14

(3) 一直线与直径长为 m 的圆相交，圆心 O 到这条直线的距离为 d，则 m 与 d 之间的关系是(　　).

A $d=\frac{m}{2}$　B $d<\frac{m}{2}$　C $d>\frac{m}{2}$　D 以上都不对

(4) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$，半圆内切于 $\triangle ABC$，且半圆直径 MN 在 AB 上，半圆分别和 AC 切于 D，BC 切于 E，已知 $AC=6$，$BC=8$，则 MN 等于(　　).

A 4　　B $4\frac{2}{9}$　　C $3\frac{3}{7}$　　D $6\frac{6}{7}$

2. 填空题：

(1) 在弓形 ACB 中，弦 $AB=24$，高 $CD=6$，则弓形所在圆的半径为____.

(2) 如图 68-6，$ABCD$ 是圆内接四边形 $AB=35$cm，$CD=5$cm，延长 BA、CD 相交于 E，从 E 引 $\odot O$ 的切线，EF 的长为 6cm，则 $DE=$____，$AD:BC=$____.

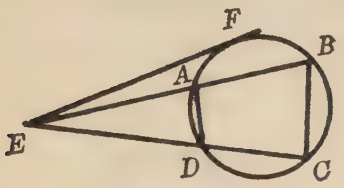


图 68-6

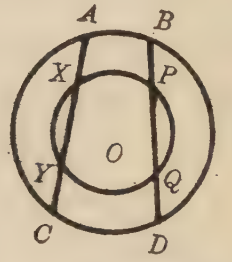


图 68-7

(3) 如图 68-7，两同心圆的圆心为 O，大圆的弦 AC、BD 分别交小圆于 X、Y、P、Q，且 $AX=\sqrt{3}$，$AC=2+\sqrt{3}$，$BP=\sqrt{2}$，则 BD____.

3. 证明题：

如图 68-8，已知 A、D、F 在圆上，BC 切 $\odot O$ 于 C 点，且 $DF\parallel BC$，求证 $\frac{BD}{CE}=\frac{BC}{CF}$.

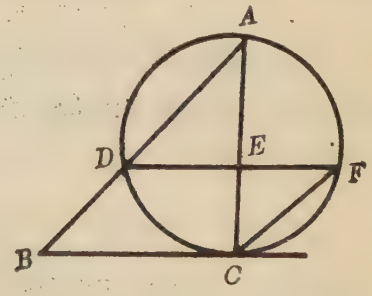


图 68-8

第 69 天　　圆与圆的位置关系

复习要求：

1．掌握圆与圆的位置关系和这些关系间的判定；

2．掌握两圆连心线的性质，内外公切线的计算和作图．

例 1 如图 69-1，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于点 A、B，过 A 引一直线分别与 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 交于点 C、D，过 C、D 分别作 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的切线 CE、DE 交于点 E．求证：$\angle BCD=\angle BED$．

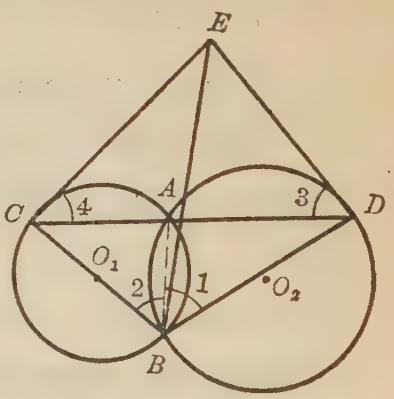


图 69-1

证明 连结 AB，

EC 切 $\odot O_1$ 于 $C \Longrightarrow \angle 4=\angle 2$

ED 切 $\odot O_2$ 于 $D \Longrightarrow \angle 3=\angle 1$

$\Longrightarrow \angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 2=\angle CBD$

$\angle 3+\angle 4+\angle CED=180°$

$\Longrightarrow \angle CBD+\angle CED=180°$

即 B、C、E、D 四点共圆 $\Longrightarrow \angle BCD=\angle BED$．

两圆相交时，常连结它们的公共弦．

例 2 如图 69-2，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于 P，AC 切 $\odot O_1$ 于 A，切 $\odot O_2$ 于 C，AB 是 $\odot O_1$ 的直径．

求证：从 B 引 $\odot O_2$ 的切线 BD 的长等于 AB．

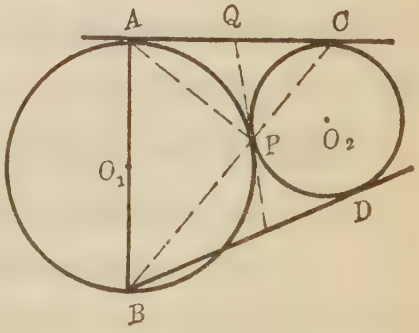


图 69-2

证明 过 P 作两圆内公切线交 AC 于 Q，连结 AP、BP、CP．

∵ QA、QP 切 $\odot O_1$ 于 A、P，∴ $AQ=QP$．

QC、QP 切 $\odot O_2$ 于 C、P，∴ $CQ=QP$．

即 $AQ=QP=CQ$.

又 ∵ $\triangle APC$ 为直角三角形，$\angle APC=90°$，$\angle APB=90°$.

∴ B、P、C 三点共线，即 $AP\perp BC$.

∵ AB 为直径，A 为切点， ∴ $AC\perp AB$.

在直角三角形 ABC 中，有 $AB^2=BP\cdot BC$，

又 ∵ BD 切 $\odot O_2$ 于 D， ∴ $BD^2=BP\cdot BC$.

∴ $BD=AB$.

两圆相切时，常添它们的公切线或连心线.

例 3 如图 69-3，已知半圆的直径长 $AB=16$，过 O 作 $OC\perp AB$ 交半圆于 C，以 OC 为直径作 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 外切，与 $\odot O$ 内切，且与 AB 相切. 求 $\odot O_2$ 的半径；$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的外公切线的长.

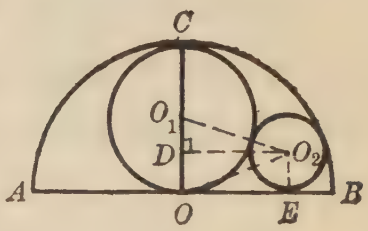


图 69-3

解 设 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 R、r；

连结 O_1O_2、OO_2.

过 O_2 作 O_1O 的垂线 O_2D，垂足为 D；过 O_2 作 OB 的垂线 O_2E，垂足为 E.

则 $O_1O_2=R+r=4+r$，

$O_1D=R-r=4-r$，

$OO_2=2R-r=8-r$.

∵ $O_1O_2^2-O_1D^2=O_2D^2=OO_2^2-OD^2$，

∴ $(4+r)^2-(4-r)^2=(8-r)^2-r^2$.

解得 $r=2$.

又 ∵ 外公切线长 $OE=O_2D=\sqrt{O_1O_2^2-O_1D^2}$

$=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}$

$$=\sqrt{(4+r)^2-(4-r)^2}$$
$$=4\sqrt{2}.$$

∴ $\odot O_2$ 的半径为 2，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的外公切线长为 $4\sqrt{2}$.

有关两圆公切线问题，常常过其中一个圆心作公切线的平行线，与连心线构成直角三角形(如图 69-4)，这样就可运用直角三角形的性质进行论证和计算.

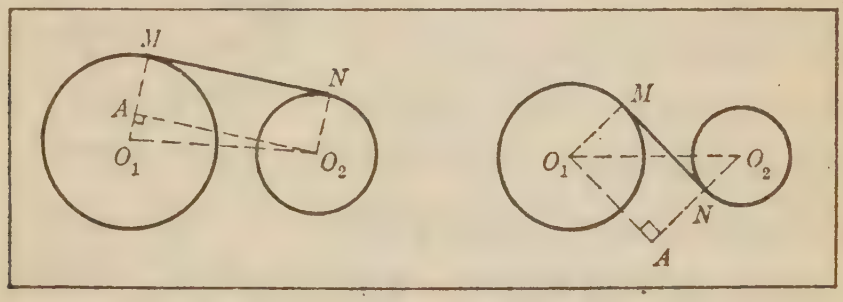


图 69-4

练习六十九

1. 选择题：

(1) 两圆相切，它们的公切线最多的条数是(　　).

A 4条　　B 3条　　C 2条　　D 1条

(2) $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的直径分别为10cm 与 6cm，且 O_1O_2 为 7cm，则 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的位置关系为(　　).

A 内切　　B 外切　　C 相交　　D 相离

(3) 两圆半径分别为 R、$r(R>r)$，圆心距为 d，且 $R^2-r^2+d^2=2dR$，则这两圆的位置关系为(　　).

A 相交　　B 外切　　C 内切　　D 内切或外切

(4) $\odot O$ 与 $\odot O'$ 相交于 A、B 两点，OA 切 $\odot O'$ 于 A，$\odot O$ 的半径为 6，$\angle AOO'=30°$. 则 AB 长是(　　).

A $6\sqrt{3}$　　B $2\sqrt{3}$　　C 6　　D 3

2. 填充题：

(1) 已知两圆圆心距为 5cm，大圆半径为 2.5cm，小圆半径为 1.5cm，则两圆外公切线长是____；内公切线长是____.

(2) 两圆互相外切，半径分别长 6cm、2cm，则它们的外公切线的夹角是____.

(3) 两圆半径之比为 3:5，当两圆内切时圆心距为 4cm，则两圆外切时圆心距的长为____.

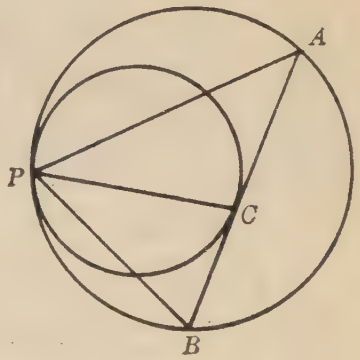


图 69-5

3. 如图 69-5，已知两圆内切于 P，大圆的弦 AB 切小圆于 C. 求证：$\angle APC = \angle BPC$.

第 70 天　圆与多边形

复习要求：

1. 掌握圆的内接四边形的性质与判定及圆外切四边形的性质；

2. 理解正多边形的概念，掌握正多边形的有关计算；

3. 掌握圆的周长、面积、弧长和扇形面积的计算公式，并能解决有关计算问题.

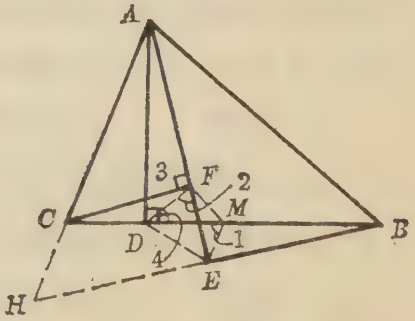


图 70-1

例 1　如图 70-1，已知 AE 平分 $\angle BAC$，$BE \perp AE$，$CF \perp AE$，$AD \perp BC$，E、F、D 分别为垂足，M 为 BC 中点，求证：M、E、D、F 四点共圆.

分析：由于 BE 是角平分线 AE 的垂线，所以图中就出现

了“角平分线＋垂线”这一等腰三角形的基本图形，但已知的图形不完整，就应将这个等腰三角形添全.即延长 BE 交 AC 的延长线于 H，由等腰三角形的性质得 E 为 BH 中点．而已知 M 为 BC 中点，因此出现了多个中点问题，于是由三角形中位线这个基本图形的性质，得 $EM \parallel AC$，故 $\angle 1 = \angle ACB$，又因为 $\angle 3 = \angle 4 = 90°$，所以 A、C、D、F 四点共圆，由圆内接四边形性质得 $\angle 2 = \angle ACB$，所以 $\angle 1 = \angle 2$．由圆内接四边形的判定定理得 M、E、D、F 四点共圆.

证明四点共圆问题，除常用课本中的三种判定方法外，还可用相交弦、切割线定理的逆定理来判定.即如图 70-2，若 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$，则 A、B、C、D 四点共圆.

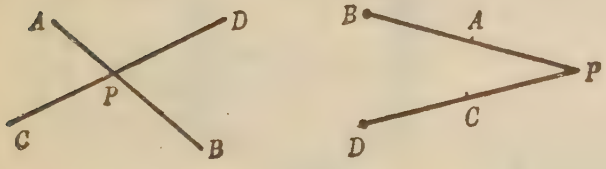


图 70-2

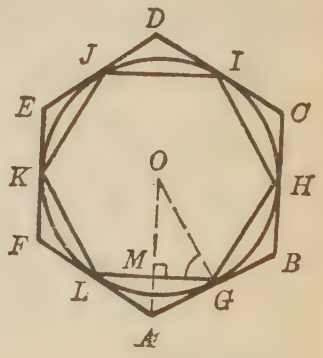


图 70-3

例 2 同一圆的内接正六边形和外切正六边形的面积之比为(　　).

A $\sqrt{3}:2$　　B $3:4$　　C $\frac{\sqrt{3}}{2}:1$　　D $9:16$

解 如图 70-3，设外切正六边形的边长为 a，内接正六边形的边长为 b．连结 OA、OG，则 $OA \perp LG$，M 为垂足，$OG \perp AB$，G 为垂足.

在 $Rt\triangle MAG$ 中，$\angle MAG = 60°$，$AG = \frac{a}{2}$，$MG = \frac{b}{2}$，

$$\therefore \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}=\sin 60^\circ,\ \text{即}\ \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

∵ 正六边形 $GHIJKL\backsim$正六边形 $ABCDEF$,

$$\therefore \frac{S_{\text{正六边形}GHIJKL}}{S_{\text{正六边形}ABCDEF}}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{3}{4}.$$ 故应选 B.

有关正多边形的计算问题，常常归结为由边长之半、边心距和半径组成的直角三角形的计算问题. 不必死记硬背计算公式.

例 3 如图 70-4，相交两圆的公共弦长 120cm，它分别是一圆内接正六边形的边和另一圆内接正方形的边. 求两圆相交弧间的阴影部分的面积.

解 ∵ 公共弦 $AB=120$,

$\therefore a_4=R_6=120$,

$$r_6=\sqrt{R_6^2-\left(\frac{a_4}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{120^2-60^2}=60\sqrt{3},$$

$\angle O_1=60^\circ$.

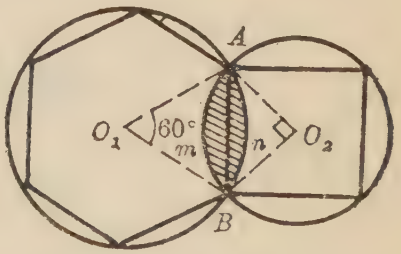


图 70-4

$$a_4=120,\ R_4=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=60\sqrt{2}.\ r_4=\sqrt{R_4^2-\left(\frac{a_4}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(60\sqrt{2})^2-60^2}=60,\quad \angle O_2=90^\circ.$$

∵ $S_{\text{弓形}AmB}=S_{\text{扇形}AO_2B}-S_{\triangle AO_2B}$

$$=\frac{90\pi R_4^2}{360}-\frac{1}{2}a_4r_4=1800\pi-3600,$$

$S_{\text{弓形}AnB}=S_{\text{扇形}AO_1B}-S_{\triangle AO_1B}$

$$=\frac{60\pi R_6^2}{360}-\frac{1}{2}a_6r_6=2400\pi-3600\sqrt{3},$$

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\text{弓形}AmB}+S_{\text{弓形}AnB}$

$= 4200\pi - 3600(1+\sqrt{3})$.

∴ 两圆相交弧间的阴影部分的面积为 $4200\pi - 3600(1+\sqrt{3})$.

求圆中阴影部分面积问题，常常要把一个图形分割成几个扇形或弓形面积来计算.

扇形面积公式：$S_{扇形}=\frac{n\pi R^2}{360}$与弧长公式$l=\frac{n\pi R}{180}$的关系是$S_{扇形}=\frac{1}{2}lR$. 在计算扇形面积时应根据条件合理选取公式.

弓形面积在计算时应注意：

① 当弓形所含的弧是劣弧时，$S_{弓形}=S_{扇形}-S_{三角形}$.

② 当弓形所含的弧是优弧时，$S_{弓形}=S_{扇形}+S_{三角形}$.

练习七十

1. 选择题：

(1) 如图 70-5，$\triangle ABC$ 中，三条高 AD、BE、CF 相交于 H，在 A、B、C、D、E、F、H 七个点中，四点共圆的有(　　)组.

A 3　B 4　C 5　D 6

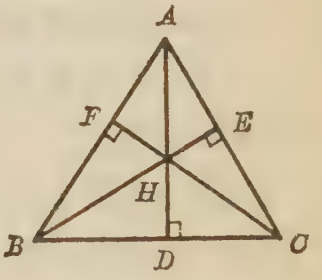


图 70-5

(2) 圆的内接梯形是(　　).

A 直角梯形　B 等腰梯形

C 两组对边和相等的梯形

D 以上都不对

(3) 两个同心圆中，大圆的弦 AB 切小圆于点 C，$AB=a$，则同心圆的圆环面积是(　　).

A $\frac{\pi}{5}a^2$　B $\frac{\pi}{4}a^2$　C $\frac{\pi}{3}a^2$　D $\frac{\pi}{2}a^2$

(4) 如图 70-6，已知 $\odot O$ 的半径为 R，则它的内接正 $\triangle ABC$ 的内切圆的内接正方形 $DEFG$ 的边长为(　　).

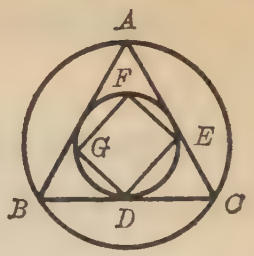


图 70-6

A $\frac{1}{2}R$　B $\frac{\sqrt{2}}{2}R$　C $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

D $\frac{1}{3}R$

(5) 如图 70-7，等腰梯形 $ABCD$ 外切于 $\odot O$，$AD \parallel BC$，$\angle B = 30°$，中位线 $EF = 4$. 则 $\odot O$ 的半径是(　　).

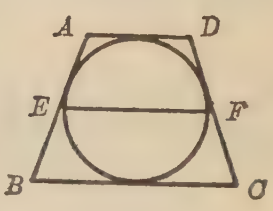


图 70-7

A 1　B 1.5　C 1.75　D 2

2. 填空题：

(1) 圆内接四边形相邻三个角的比是 2:1:7. 则这个四边形最大角是____.

(2) 一个圆内接正三角形的面积为 $9\sqrt{3}\,cm^2$，那么这个圆的外切正三角形的面积是____.

(3) 正六边形对角线长为 m，则边心距等于____.

(4) 半径为 R，圆心角为 120° 的扇形的周长是____.

(5) 如图 70-8，$\odot O_1$ 内切于圆心角为 60° 的扇形，且 $\odot O_1$ 的面积为 9π，则此扇形的面积为____，周长为____.

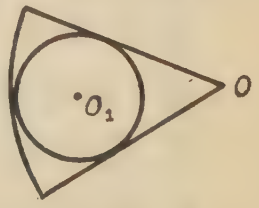


图 70-8

3. 如图 70-9，两圆相交于 A、B 两点，过 B 点的直线交两圆于 C、E，在 BA 的延长线上任取一点 P，连结 PC、PE 分别交两圆于 D、F，求证：(1) P、D、A、F 四点共圆；(2) D、C、E、F 四点共圆.

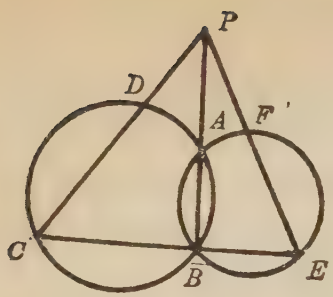


图 70-9

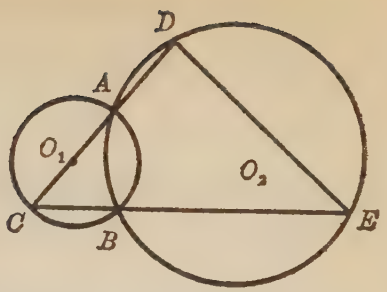


图 70-10

4. 如图 70-10，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B，AC 是 $\odot O_1$ 的直径，分别延长 CA、CB 交 $\odot O_2$ 于 D、E. 若 $AC=4$，$BE=10$，且 $BC=AD$. 求：(1) DE 的长；(2) 由 AC、BC 与 $\odot O_1$ 的劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 围成的图形的面积.

第 71 天　练习七十一

1. 选择题：

(1) 如果 $\overset{\frown}{AB}$ 的度数为 160°，C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任意一点，则 $\angle ACB$ 的度数是(　　).

A 160°　　B 160° 或 100°　　C 80°　　D 100°

(2) 如图 71-1，在半径不等的两同心圆中，d_1、d_2 分别为弦心距，当 $d_1 \neq d_2$ 时，下列各等式中能成立的是(　　).

A $PA \cdot PC = PD \cdot PF$

B $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PB}{PE}$

C $PA \cdot EF = BC \cdot PD$

D $\dfrac{PB}{PF} = \dfrac{PE}{PC}$

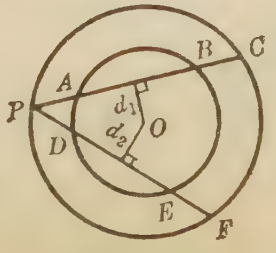


图 71-1

(3) 下列命题中正确的是(　　).

A 同圆中大弧所对的弦较大

B 四点都和某一定点等距，则这四点在同一个圆上

C 垂直于半径的直线是圆的切线

D 半径为 R 和 r 的两圆相切，则圆心距 $d=|R-r|$

(4) 和两个同心圆都相切的圆必定是(　　).

A 和小圆外切且和大圆内切

B 和小圆内切且和大圆外切

C 和两圆都内切

D 以上都不对

(5) 如图 71-2，OAB 是以 6cm 为半径的扇形，AT 切 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 A，交 OB 的延长线于点 T. 如果 $\overset{\frown}{AB}=3$cm，$AT=4$cm，那么图中阴影部分的面积为(　　).

A 15cm^2　　B 6cm^2

C 4cm^2　　D 3cm^2

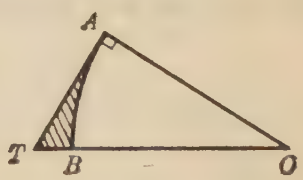


图 71-2

2. 填空题：

(1) 已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 P，且两条外公切线相交于 M，分别切 $\odot O_1$ 于 A、B，切 $\odot O_2$ 于 C、D. $AB=4$cm，$CD=12$cm，则 $\angle M=$ ____.

(2) 如图 71-3，延长 $\odot O$ 的直径 PQ 到点 R，取 $QR=$

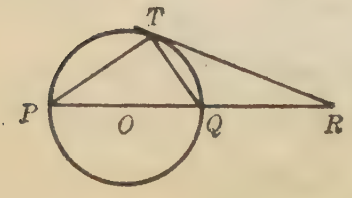


图 71-3

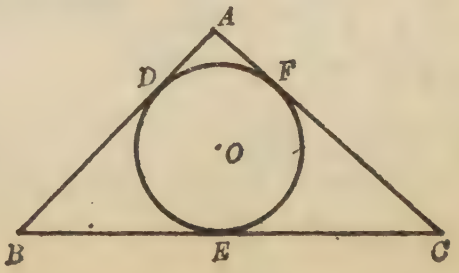


图 71-4

PQ，从点 R 作 $\odot O$ 的切线 RT，T 为切点．当 $PQ=2$ 时，则 $RT=$____．$PT:TQ=$____，$TQ=$____，$PT=$____，$S_{\triangle PRT}=$____．

(3) 如图 71-4，$\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 内切于 D、E、F，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则 AD 的长为____．

(4) 若扇形面积为 12π，它的弧所对的圆周角为 $15°$，则扇形半径为____．

(5) 正六边形周长为12，则同半径的正三角形周长为____．

3．如图 71-5，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上，$\odot C$ 切 AB 于 D，与 $\odot O$ 相交于 E、F 两点，EF 交 CD 于点 G．求证：$CG=DG$．

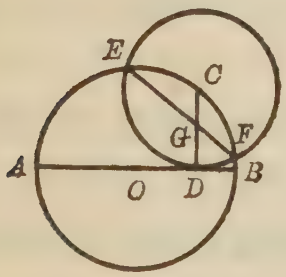


图 71-5

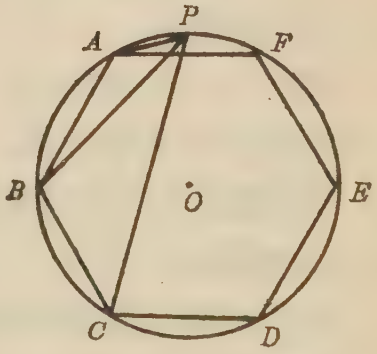


图 71-6

4．如图 71-6，已知圆内接正六边形 $ABCDEF$，P 是 $\overset{\frown}{AF}$ 上任意一点，求 $\dfrac{PA+PC}{PB}$ 的值．

八、点的轨迹

本单元分 3 天复习．

本单元的主要内容及其相互关系见插表 8．

第72天　点的轨迹

复习要求：

1．了解命题的四种形式及其相互关系；

2．了解轨迹的概念，熟悉六种基本轨迹；

3．理解用反证法证明命题的思路，能用反证法证明一些较简单的几何题．

例1　(1) 写出命题“在一个三角形中，两角不等，那么它们所对的两条边也不等”的逆命题、否命题和逆否命题．

(2) 写出命题“如果三个角都是直角，那么这三个角都相等”的等价命题．

解　(1) 逆命题：在一个三角形中，两条边不等，那么它们所对的两个角也不等．

否命题：在一个三角形中，两角相等，那么它们所对的两条边也相等．

逆否命题：在一个三角形中，两条边相等那么它们所对两个角也相等．

(2) 原命题的等价命题是：如果三个角不都相等，那么这三个角不都是直角．

在写一个原命题的其他三种形式时要注意两点：

① 弄清命题的题设、结论．注意区分“大前题”，如(1) 中的“在一个三角形中”．

② 注意否定语句的“不都是”与“都不是”的区别．

例2　用反证法证明四边形的两组对边的和相等．则此四边形是圆的外切四边形．

已知：在四边形 $ABCD$ 中，$AB+CD=AD+BC$.

求证：四边形 $ABCD$ 外切于圆.

证明 如图 72-1，作 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线交于 O 点. 以 O 为圆心，O 到 AB 的距离 OE 为半径作 $\odot O$，则 $\odot O$ 与 AB、AD、BC 三边都相切，设切点为 E、F、G. 假设 $\odot O$ 与 DC 不相切，则有以下两种情况：

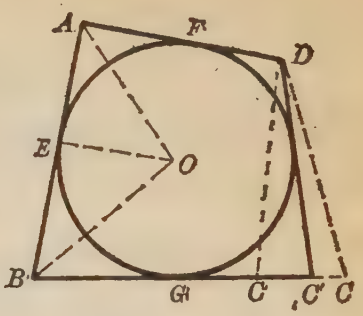


图 72-1

(1) DC 与 $\odot O$ 相交；过 D 作 DC' 与 $\odot O$ 相切交 BC 的延长线于 C'，由圆外切四边形定理，得

$$AB+DC'=AD+BC' \qquad ①$$

$$\because \quad AB+CD=AD+BC \qquad ②$$

①－②得 $DC'-DC=BC'-BC$

$\therefore \quad DC'-DC=CC'$

即 $DC'=DC+CC'$

而 DC、DC'、CC' 是 $\triangle DCC'$ 的三条边，$\therefore$ 有 $DC'<DC+CC'$，故矛盾，所以假设 DC 与 $\odot O$ 相交，不能成立.

(2) DC 与 $\odot O$ 相离；同理可证不能成立.

由 (1)、(2) 知，DC 必与 $\odot O$ 相切，即四边形 $ABCD$ 外切于圆.

用反证法证题的一般步骤是：

① 反设：假定所证结论不成立；

② 推理：从假定与已知条件出发，进行一系列推理；

③ 归谬：得出与公理、定理或已知条件相矛盾的结果，证明原来的假定是错误的；

④ 结论：肯定原命题的结论是正确的.

例 3 说明并作出下列点的轨迹.（不要求证明）

(1) $\triangle ABC$ 的 BC 边为定长．$\angle A=40°$，求 $\triangle ABC$ 的内心 P 的轨迹．

(2) 线段长为 m．两端点在一直角的两边上进行滑动，求线段中点 P 的轨迹．

解 (1) ∵ $\angle A=40°$，又 ∵ P 为 $\triangle ABC$ 的内心，

∴ BP、CP 为 $\angle B$、$\angle C$ 的角平分线，

∴ $\angle BPC=110°$．

而 BC 为定长，

根据基本轨迹六，可知，点 P 的轨迹为以 BC 为弦，含 $110°$ 圆周角的两段弧，$\overset{\frown}{BPC}$、$\overset{\frown}{BP'C}$(B、C除外)，作图略．

(2) 如图 72-2，线段 AB 的两个端点在直角 $\angle MON$ 的两边上，则 $\triangle AOB$ 为直角三角形，P 为斜边上的中线．

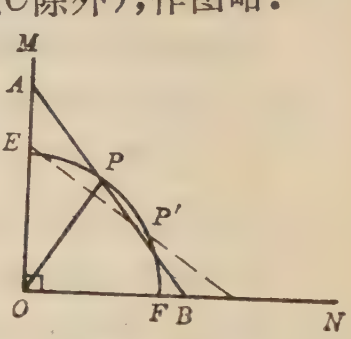


图 72-2

∴ $OP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}m$（定长）．

∴ 所求轨迹为以直角的顶点为圆心，以 $\frac{1}{2}m$ 为半径，夹在直角的两边之间的一段弧．

求点的轨迹的一般步骤是：

① 描出一些适合条件的点；

② 研究并总结这许多点的共同性质及与已知条件的关系，从而根据基本轨迹确定所求的轨迹是什么图形；

③ 根据题意，审查有否需要排除的特殊点．

练习七十二

1．选择题：

(1) 原命题“矩形的两条对角线相等”的否命题是

(　　).

A 对角线相等的四边形是矩形

B 对角线不相等的四边形不是矩形

C 四边形不是矩形，则它的两条对角线不相等

D 矩形的两条对角线不相等

(2) 命题"若 A 不正确，则 B 正确"的等价命题是(　　).

A 若 B 不正确，则 A 不正确

B 若 B 不正确，则 A 正确

C 若 A 正确，则 B 不正确

D 若 B 正确，则 A 正确

(3) 否定"三角形中最多有一个钝角"这个结论时，正确的说法是(　　).

A 三角形中没有钝角

B 三角形中有一个钝角

C 三角形中至少有一个钝角

D 三角形中至少有两个钝角

(4) 已知 $\odot O$ 半径为 R，到 $\odot O$ 所作的切线长等于定长 a 的点的轨迹是(　　).

A 以 O 为圆心，以 $R+a$ 为半径的圆

B 以 O 为圆心，以 a 为半径的圆

C 以 O 为圆心，以 $\sqrt{R^2+a^2}$ 为半径的圆

D 以 O 为圆心，以 $\sqrt{R^2-a^2}$ 为半径的圆

2. 填空题：

(1) 已知命题"圆的两条平行弦所夹的弧相等"的逆命题：_____.

否命题：_____.

逆否命题：_____。

(2) 和两个半径分别为 R、$r(R>r)$ 的同心圆都相切的圆的圆心轨迹是：_____。

(3) 在半径为 R 的已知 $\odot O$ 内，弦长等于 $2a$ 的弦的中点的轨迹是：_____。

(4) $\triangle ABC$ 的底边 $BC=6\text{cm}$，面积为 9cm^2，这个三角形顶点 A 的轨迹是：_____。

3. 说明并画出以已知线段 AB 为一底边的等腰梯形对角线交点的轨迹。

4. 用反证法证明：命题“如果 l 和 $\odot O$ 相离，则 $d>r$”。

第 73 天　基本作图

复习要求：

1. 掌握有关线段、直线和角的基本作图方法：

(1) 作一条线段等于已知线段；

(2) 作一个角等于已知角；

(3) 作已知角的平分线；

(4) 过已知点作已知直线的垂线；

(5) 作已知线段的垂直平分线；

(6) 过已知直线外一点，作直线的平行线；

(7) 作已知三条线段的第四比例项；

(8) 已知两边夹角、两角夹边、三边作三角形。

2. 掌握有关圆的基本作图方法：

(1) 过不在一直线上的三个已知点作圆；

(2) 作三角形的内切圆；

(3) 在已知线段上作弧，使它所含的圆周角等于已知角；

(4) 作两圆的外、内公切线.

作图题要求：会写已知，求证，作法. 一般不要求写证明和讨论.

例 1 已知：线段 a、b 及 $\angle\alpha$.

求作：$\square ABCD$，使 $AC=a$，$BD=b$，$\angle A=\angle\alpha$.

作法 (1) 作线段 $BD=b$；(如图 73-1)

(2) 作 BD 的垂直平分线 MN，垂足为 O；

(3) 以 BD 为弦作弧 $\overset{\frown}{BMD}$ 使它所含圆周角等于 $\angle\alpha$；

(4) 以 O 为圆心，以 $\frac{1}{2}a$ 为半径作弧交 $\overset{\frown}{BMD}$ 于点 A；

(5) 连结 AO 并延长到 C，使 $OC=OA$；

(6) 连结 BA、AD、DC、CB.

则四边形 $ABCD$ 即为所求的平行四边形.

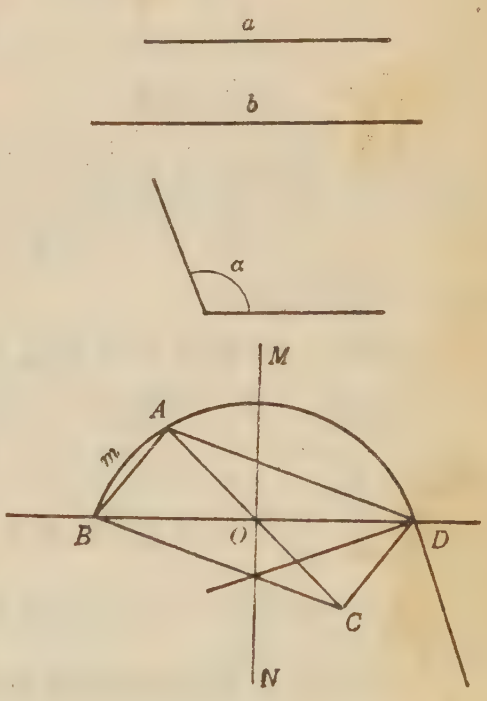


图 73-1

例 2 求作一点，使它和一个已知点 A 的距离等于定长 l，并且和另外两个已知点 B、C 的距离相等.

作法 (1) 以 A 为圆心，l 为半径作 $\odot A$；(如图 73-2)

(2) 连结 BC，作 BC 的垂直平分线交 $\odot A$ 于 M、N；

则 M、N 为所求的点.

本题用了交轨法作图. 用交轨法作图时，往往是先作出满足一个条件的点的基本轨迹，再作出满足另一条件的点的基

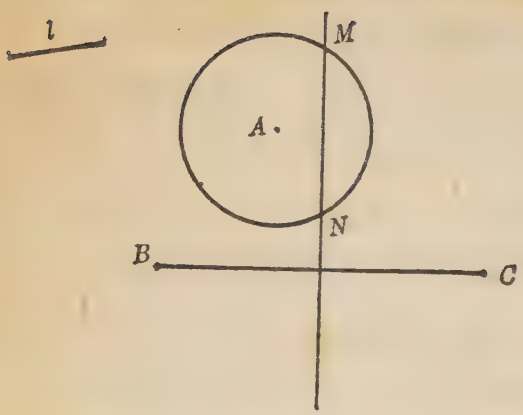


图 73-2

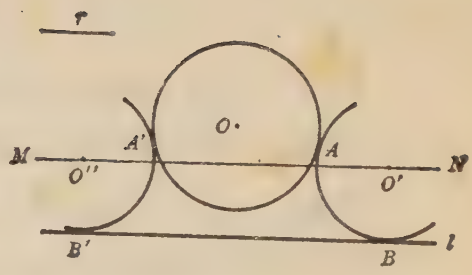


图 73-3

本轨迹．两个基本轨迹的交点即为所求之点．

例 3 如图 73-3，已知 $\odot O$ 的半径为 R，直线 l 与 $\odot O$ 相离，以及线段 r．

求作：半径为 r 的圆弧与 $\odot O$ 外连接且与直线 l 连接．

作法 (1) 作直线 l 的平行线 MN，使得 MN 到 l 的距离为 r；

(2) 以 O 为圆心，以 $R+r$ 为半径画弧交 MN 于 O'、O''；

(3) 分别以 O'、O'' 为圆心，以 r 为半径作弧 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{A'B'}$；

则 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{A'B'}$ 即为所求圆弧．

圆弧与圆弧的外(内)连接，实际上就是圆与圆的外(内)切，圆弧与直线的连接实际上就是圆弧与直线的相切．

练习七十三

1．已知线段 b_1、b_2($b_1<b_2$)，a_1、a_2．求作：一个梯形使两底分别为 b_1、b_2，两腰分别为 a_1、a_2．

2．如图 73-4，已知 $\angle AOB$ 和 C、D 两点．求作一点 P，

使 $PC=PD$，并且使 P 到 $\angle AOB$ 的两边 OA、OB 的距离相等.

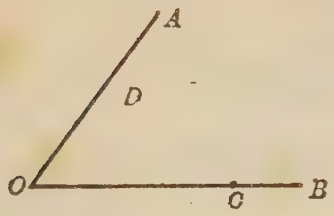


图 73-4

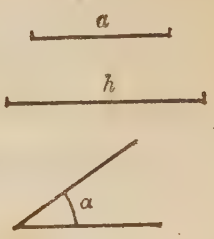


图 73-5

3. 如图 73-5，已知线段 a、h、$\angle\alpha$，求作 $\triangle ABC$，使 $BC=a$，BC 边上的高 $AH=h$，$\angle BAC=\angle\alpha$.

第 74 天　练习七十四

1. 选择题：

(1) 一个命题的逆命题的否命题是(　　).

A 原命题　　B 原命题的逆命题

C 原命题的否命题　D 原命题的逆否命题

(2) 如果一个命题的否命题不正确，那么下述结论中，正确的结论是(　　).

A 原命题一定正确

B 原命题一定不正确

C 这个命题的逆命题一定正确

D 这个命题的逆否命题一定正确

(3) “全等三角形是相似三角形”的等价命题是(　　).

A 不全等的三角形不是相似三角形

B 不相似的三角形不是全等三角形

C 相似三角形不是全等三角形

D 全等三角形不是相似三角形

2. 填空题:

(1) “直径是圆的最大的弦”的否命题是: _____

_____.

(2) 和 $\odot O$ 相交于圆上两点 A、B 的圆的圆心轨迹是: _____.

(3) 已知 $\odot O$ 上一点 A,以 A 为端点的弦的中点的轨迹是: _____.

(4) 斜边为 AB 的直角三角形重心的轨迹是: _____

_____.

3. 作图题:

(1) 如图 74-1,求点 P, 使它到 A、B 两点距离相等,且到两条相交直线 CD、EF 的距离也相等.

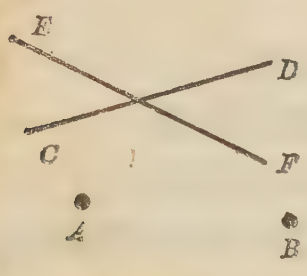


图 74-1

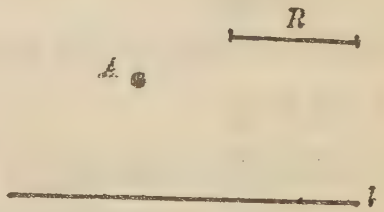


图 74-2

(2) 作一个半径为 R 的圆和已知直线 l 相切,且经过直线 l 外的一点 A(如图 74-2).

(3) 已知菱形的一个角 α,和这个角的顶点的对角线的长 a,求作此菱形.

九、一些几何证明的常用方法

第 75 天　怎样证明线段相等

复习要求：

掌握证明线段相等的一些常用方法：

1．利用全等三角形；

2．利用特殊三角形中有关线段相等定理；

3．利用特殊四边形中有关线段相等定理；

4．利用线段垂直平分线和角平分线性质；

5．利用平行线、成比例线段的有关性质；

6．利用圆中有关线段相等的性质；

7．利用等量代换或其他等量公理．

例 1　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，在 AB 上取一点 E，在 AC 延长线上取一点 F，使 $BE=CF$，设 EF 交 BC 于 G．求证 $EG=FG$．

证一　如图 75-1，过 E 作 $EM \parallel AC$ 交 BC 于 M，通过证 $\triangle EMG \cong \triangle FCG$，得 $EG=GF$．

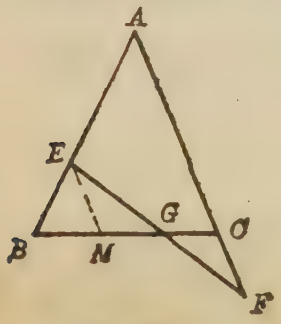


图 75-1

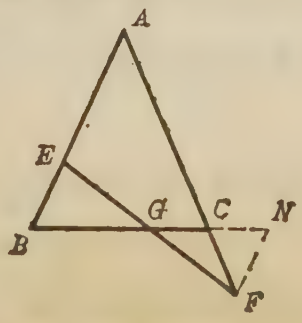


图 75-2

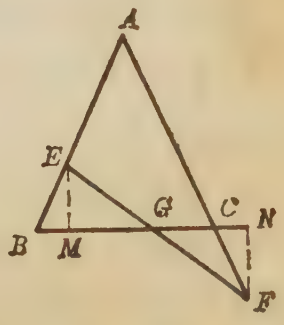


图 75-3

请同学们自己完成图 75-2，图 75-3 的证明.

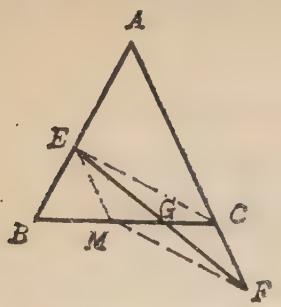


图 75-4

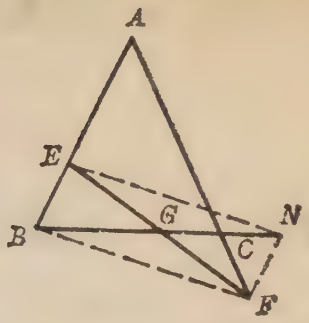


图 75-5

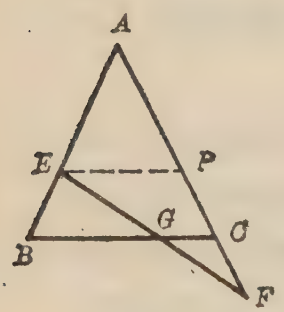


图 75-6

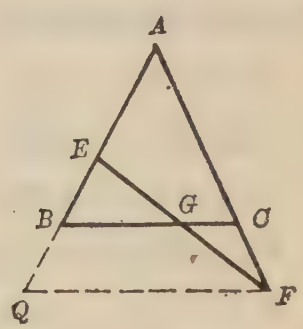


图 75-7

证二 如图 75-4，过 E 作 $EM \parallel AC$ 交 BC 于 M，则 $\angle EMB = \angle ACB = \angle B$，$\therefore EM = EB = CF$，因此四边形 $EMFC$ 是平行四边形，则 $EG = FG$.

请同学们自己完成图 75-5 的证明.

证三 如图 75-6，过 E 作 BC 的平行线交 AC 于 P，据平行线分线段成比例定理，有 $\frac{BE}{AB} = \frac{CP}{AC}$. $\because AB = AC$，$\therefore CP = BE = CF$，即 C 为 PF 的中点，又 $CG \parallel PE$，$\therefore EG = FG$.

请同学们自己完成图 75-7 的证明.

证四 作 $\triangle BEG$ 和 $\triangle CFG$ 的外接圆交于 H，连结 BH、CH、EH、FH、GH，通过 $\triangle BEH \cong \triangle CHF$ 得 $EH = HF$，再由 $\angle GHF = \angle GHE$，即可据等腰三角形“三线

合一”的性质，得 $EG=FG$. 请同学们自己画图，作出详细的证明.

例 2 如图 75-8，在 $Rt\triangle ABC$ 中，直角 C 的平分线 CD 和斜边 AB 的中垂线交于 D. 求证 $MD=MA$.

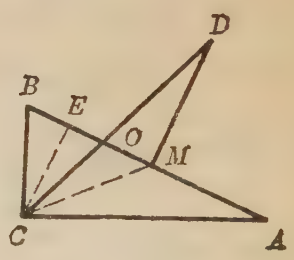


图 75-8

证明 连结 CM，则 $CM=MA=\frac{1}{2}AB$.

作 $CE\perp AB$，E 为垂足，则 $\angle BCE+\angle CBE=90°$.

而 $\angle A+\angle CBE=90°$，

$\therefore\ \angle BCE=\angle A=\angle ACM$.

但 CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，故 $\angle ECD=\angle DCM$.

又 $CE\parallel MD$，$\therefore\angle ECD=\angle MDC$，

从而 $\angle DCM=\angle MDC$，$\therefore CM=MD$.

$\therefore MD=MA$.

本题主要利用等腰三角形和等量代换来证明线段相等的.

例 3 如图 75-9，AB 为 $\odot O$ 的直径，AE、BF 为任一弦 CD 的垂线. 求证：

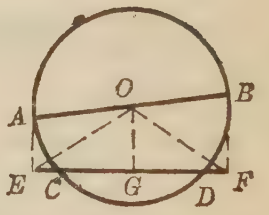


图 75-9

(1) $OE=OF$；(2) $CE=DF$.

证明 (1) 连结 OE、OF，作 $OG\perp CD$ 于 G.

$\because\ AE\parallel OG\parallel BF$，且 $AO=OB$，

$\therefore\ EG=GF$.

$\therefore\ OE=OF$.

(2) $\because\ CG=GD$，由(1) $EG=GF$，

$\therefore\ CE=DF$.

本题是利用垂直平分线的性质来证明的。

例 4 AB、AC 为 $\odot O$ 的任意两弦，E 为 AB 弧的中点，自 E 作弦 EF 与 AB、AC 分别交于 G、H，若 $\angle EGB=\angle FHC$. 求证 $AF=FC$.

证一 如图 75-10，$\because$ $\angle EGB\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{AF})$.

$\angle FHC\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{CF})$，但$\angle EGB=\angle FHC$，

$\therefore \overset{\frown}{BE}+\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{CF}$. 而 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，

$\therefore \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{CF}$，从而$AF=FC$.

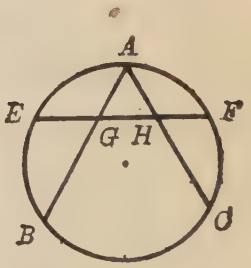


图 75-10

证二 如图 75-11，自 E 及 F 各作切线相交于 Q. $\because$ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，$\therefore$ $QE\parallel AB$，于是$\angle QEF=\angle EGB=\angle FHC$. 又$\angle QEF=\angle QFE$，

$\therefore\angle FHC=\angle QFE$，$\therefore$ $QF\parallel AC$，从而 $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FC}$，

$\therefore AF=FC$.

证三 如图 75-12，连结 OE 及 OF，各交 AB、AC 于 M 及 N. $\because$ $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BE}$，$\therefore OE\perp AB$. 在$\triangle GEM$ 和 $\triangle HFN$ 中，$\angle GEM=\angle HFN$，$\angle EGM=\angle FHN$，$\therefore\angle HNF=\angle EMG$

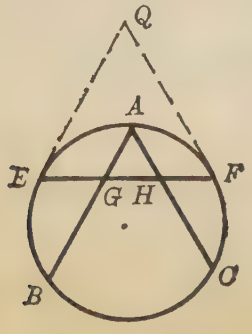


图 75-11

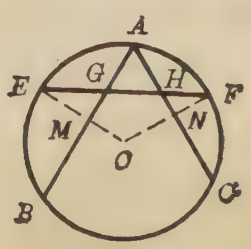


图 75-12

$=90°$，即 $OF\perp AC$，$\therefore\ \overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FC}$，从而 $AF=FC$.

本题中的几种解法，都是根据圆中有关线段相等的性质来证明的.

例 5 如图 75-13，AB 为半圆 O 的直径，C、D 为半圆上的两点，$CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F，$DG\perp OC$ 于 G. 求证 $CE=GF$.

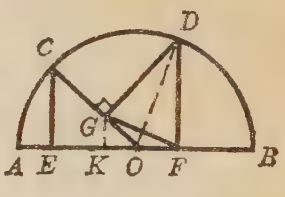


图 75-13

证明 过 G 作 $GK\perp AB$ 于 K，

则 $\triangle OGK\backsim\triangle OCE$，

$$\therefore\ \frac{GK}{CE}=\frac{OG}{OC}. \qquad ①$$

连结 OD，因 $\angle OGD=\angle OFD=90°$，所以 G、O、F、D 四点共圆.

$\therefore\ \angle ODG=\angle GFO=\angle GFK$.

$\therefore\ \triangle ODG\backsim\triangle GFK$.

于是 $\dfrac{OG}{GK}=\dfrac{OD}{GF}$. ②

由①、②得 $\dfrac{CE}{OC}=\dfrac{GF}{OD}$，而 $OC=OD$，

$\therefore\ CE=GF$.

本例主要是利用相似三角形来证明的.

从以上各例可知：对于比较简单的问题，运用某一种方法即可得证，如例 1 的证一. 对于较复杂的问题，常常要添加辅助线，有的要多次运用同一种方法；有的要运用几种方法；有的还需要结合运用证明角相等，两直线平行、垂直，以及共圆点等方法. 同学们应根据具体问题选用简便的证法.

练习七十五

1. $ABCD$ 为梯形，EF 为两底 AB、CD 中点的连线。若 EF 垂直于两底，则 $AD=BC$。

2. 设 AB 为半圆（圆心为 O）的直径，P 为半圆上一点，CD 为 P 处的切线，AD、BC 垂直于 CD，$PQ\perp AB$，求证 $PD=PQ$。

3. 如图 75-14，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，$\angle C$ 的平分线交 AB、AD 于 E、F，由 F 引平行于 BC 的直线交 AB 于 G。求证 $AE=BG$。

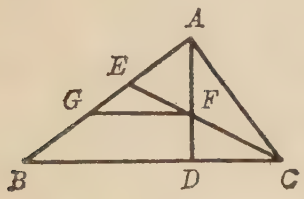


图 75-14

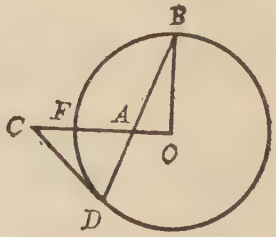


图 75-15

4. 如图 75-15，A 为 $\odot O$ 内一点，半径 $OB\perp OA$，延长 BA 交 $\odot O$ 于 D，过 D 引 $\odot O$ 的切线交 OA 于 C，求证 $CA=CD$。

5. 已知 E 是正方形 $ABCD$ 的边 AB 延长线上的一点，DE 交 BC 于 F，$FG\parallel AE$ 交 EC 于 G，求证 $FG=FB$。

第 76 天　怎样证明角相等

复习要求：

掌握证明角相等的一些常用方法：

1．利用平行线中有关角相等的定理；

2．利用三角形的内角和定理；

3．利用全等三角形；

4．利用相似三角形；

5．利用特殊三角形中有关角相等的定理；

6．利用特殊四边形中有关角相等的定理；

7．利用圆中有关角相等的定理；

8．利用别的角作介绍(等角代换，同角或等角的余角、补角等，或其他等量公理)．

例 1 已知 AD、AB 分别是 $\odot O$ 的直径和弦，AC 垂直于过 B 的切线，垂足为 C．求证 $\angle DAB=\angle BAC$．

证一 如图 76-1，连结 BD．

$\because$ BC 是切线，$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$．

又$\because$ $\angle 4+\angle 1=90°$，$\therefore$ $\angle 3+\angle 1=90°$．

而 $\angle 3+\angle 2=90°$，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$．

证二 如图 76-2，连结 BO，

则 $OB\perp CB$，且 $\angle 1=\angle 3$．

$\because$ $OB\perp CB$，$AC\perp BC$，

$\therefore$ $OB\parallel AC$．从而 $\angle 3=\angle 2$．

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$．

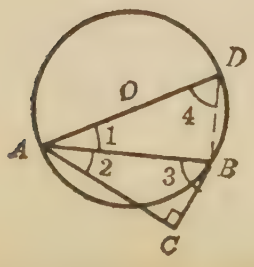


图 76-1

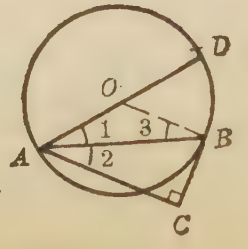


图 76-2

证三 如图 76-3，连接 BD，作 $BE\perp AD$. 由题设知 $\angle 4=\angle 5$.

$\because$ AD 是直径，$\therefore \angle ABD$ 是直角.

又 $BE\perp AD$，$\therefore \angle 3=\angle 5$，从而 $\angle 3=\angle 4$，且 $AB=AB$，$\therefore Rt\triangle ACB\cong Rt\triangle AEB$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

证四 如图 76-4，连结 DE，则 $DE\perp AC$，

$\therefore$ $DE\parallel BC$.

从而 $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

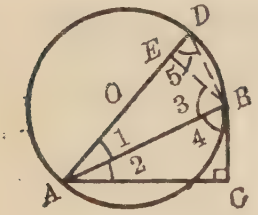


图 76-3

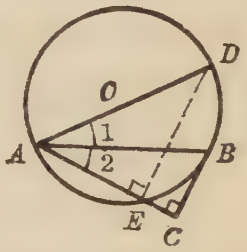


图 76-4

例 2 在线段 AB 上作 AC、BD 垂直于 AB，AD、BC 交于 E，由 E 引 $EF\perp AB$，

求证 $\angle AFC=\angle BFD$(图 76-5).

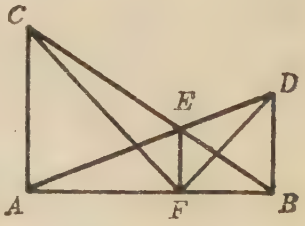


图 76-5

证明 $\because AC\perp AB, BD\perp AB$，

$\therefore AC\parallel BD$，

则 $\triangle ACE\backsim\triangle EDB$.

$$\therefore \frac{AC}{BD}=\frac{AE}{DE} \qquad ①$$

$\because$ $EF\perp AB$、$BD\perp AB$，$\therefore$ $EF\parallel BD$，

则 $$\frac{AE}{DE}=\frac{AF}{BF} \qquad ②$$

由①、②知 $\frac{AC}{BD}=\frac{AF}{BF}$，又 $\angle CAF=\angle DBF=90°$，

$\therefore$ $\triangle CAF\backsim\triangle DBF$，从而 $\angle AFC=\angle BFD$.

例 3 $\triangle ABC$ 为圆内接三角形，AP 为直径，H 为垂心，则 $\angle BHC=\angle BPC$.

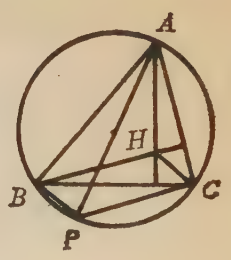


图 76-6

证明 ∵ AP 为直径，

∴ $\angle ABP=90°$，即 $BP\perp AB$.

但 $CH\perp AB$，∴ $BP\parallel CH$.

同理 $BH\parallel CP$，∴ $CHBP$ 为平行四边形.

∴ $\angle BHC=\angle BPC$.

例 4 设 MN 为 $\odot O$ 外的一条直线，$OA\perp MN$，A 为垂足，过 A 作 $\odot O$ 的割线，交 $\odot O$ 于 B、C 两点，过 B、C 作 $\odot O$ 的切线 BD、CE. 分别与 MN 交于 D、E 两点. 求证 $\angle DOA=\angle AOE$.

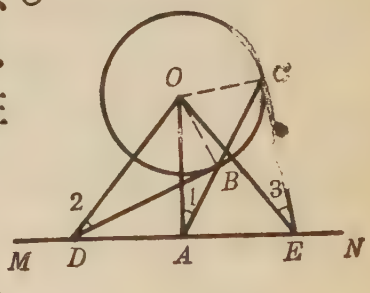


图 76-7

证明 连结 OB、OC，

则 $\angle OBD=90°$，$\angle OCE=90°$.

又 $OA\perp MN$，有 $\angle OAD=\angle OAE=90°$，

∴ A、B、O、D 四点共圆，A、O、C、E 四点共圆，从而 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$，∴ $\angle 2=\angle 3$，且 $OB=OC$，

∴ $Rt\triangle OBD\cong Rt\triangle OCE$.

∴ $OD=OE$，又 $OA\perp DE$，

∴ $\angle DOA=\angle AOE$.

练习七十六

1. 以 $\triangle ABC$ 的边 AB 为直径画圆，若直径 $DE\parallel BC$，则 DB、EB 为 $\angle ABC$ 及其外角的平分线(图 76-8).

2. 如图 76-9，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AH\perp BC$，垂足为 H，

AD平分$\angle BAC$，D在圆周上．求证AD平分$\angle HAO$．

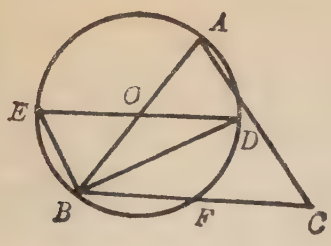


图 76-8

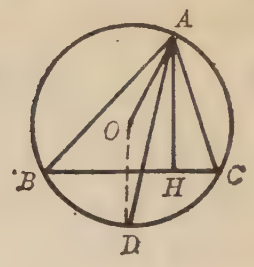


图 76-9

3．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P是三角形内任意一点，$\angle APB=\angle APC$．求证$\angle PBC=\angle PCB$．（图 76-10）

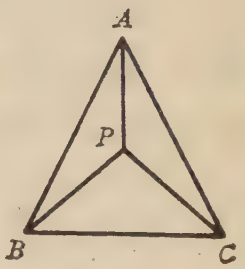


图 76-10

4．由$\odot O$外一点P引$\odot O$的切线PA、PB，A、B为切点，过AB之中点E任引$\odot O$的弦CD，则$\angle APC=\angle BPD$．

第 77 天　怎样证明线段、角的不等

复习要求；

掌握证明线段、角的不等的一些常用方法：

1．利用垂线段最短和斜足距垂足较远的斜线较长及其逆定理；

2．利用三角形两边之和大于第三边或其外角大于不相邻的内对角；

3．利用同一三角形中大边对大角及其逆定理；

4．利用两边对应相等的两三角形中，夹角大者对大边及其逆定理；

5．利用同圆或等圆中有关线段和角不等的定理；

6．利用不等量公理；

7．利用比例线段(即证两线段之比大于或小于 1)．

例 1 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 为最大角，PQ 分别为 AB、AC 上的点．求证 $PQ<BC$(图 77-1)．

证明 ∵ $\angle A$ 为最大角，即 $\angle A>\angle B$，$\angle A>\angle C$，

∴ $BC>AB$，$BC>AC$．

连结 CP，∵ $\angle BPC>\angle A>\angle B$，∴ $BC>PC$．

∵ $\angle PQC>\angle A>\angle ACB>\angle PCQ$，∴ $PC>PQ$．

∴ $BC>PQ$．

例 2 设 P 为三角形内的一点，且 $PC=BC$，求证：$AB>AP$(图 77-2)．

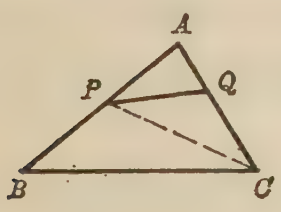


图 77-1

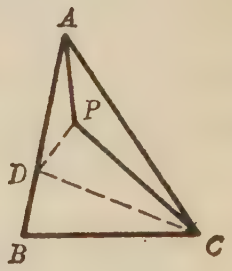


图 77-2

证一 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle APC$ 中，

∵ $AC=AC$，$PC=BC$，且 $\angle ACB>\angle ACP$，

∴ $AB>AP$．

证二 作 $\angle BCP$ 的平分线交 AB 于 D，连结 DP．

∵ $CD=CD$，$PC=BC$，

∴ $\triangle CBD\cong\triangle CPD$，于是 $DB=DP$．

在 $\triangle ADP$ 中，有 $AD+DP>AP$，即 $AD+DB>AP$，

∴ $AB>AP$．

本题的证二是利用对称法迁移线段位置的证法．对于证

明图形具有某种对称性质的命题有普遍意义.

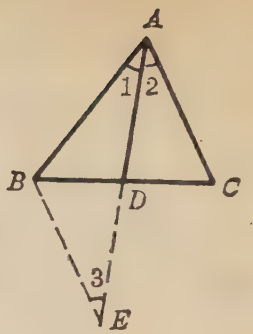


图 77-3

例 3 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 是 BC 边上的中线，求证 $\angle 1<\angle 2$.

证明 延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，

则 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$. 从而 $BE=AC$，$\angle 2=\angle 3$.

在$\triangle ABE$中，$AB>BE$，

$\therefore$ $\angle 1<\angle 3$，即 $\angle 1<\angle 2$.

本题还有其他证法，请同学们考虑怎样证.

本题是用旋转法将$\triangle ACD$ 转到 $\triangle EBD$ 的位置，使要比较大小的 $\angle 1$、$\angle 2$（即$\angle 3$)处在一个三角形中. 对具有等边特征的图形，一般可优先考虑用旋转法迁移线段或角的位置.

例 4 已知 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，CF、BE 分别为 AB 及 AC 上的高，求证 $BE>CF$.

证一 如图 77-4，因 $AB>AC$，故可在 AB 上取 G 点，使 $AG=AC$，过 G 作 $GH\perp AC$，$GK\perp BE$.

则 $\triangle AHG\cong\triangle AFC$，$\therefore$ $GH=CF$.

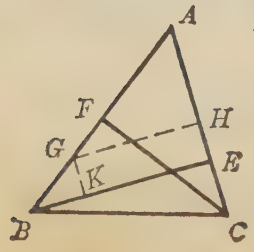


图 77-4

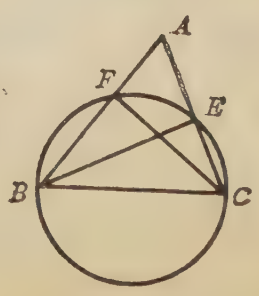


图 77-5

又 $GH=KE$，$\therefore BE>KE=GH=CF$.

证二 如图 77-5，$\because \angle BEC=\angle CFB=90^\circ$，

$\therefore$ B、C、E、F 四点共圆.

$\because$ $\angle BCE>\angle CBF$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{BFE}>\overset{\frown}{CEF}$，从而 $BE>CF$.

证三 如图 77-6，把 BE、CF 分别延长一倍到 G 和 H，结连 BH、CG，

则 $BC=GC$，$BC=BH$，$\angle BCG=2\angle ACB$，$\angle CBH=2\angle ABC$.

$\because$ $\angle ACB>\angle ABC$，$\therefore$ $\angle BCG>\angle CBH$.

在$\triangle BCG$ 和 $\triangle CBH$ 中，有 $BG>CH$，

$\therefore$ $BE>CF$.

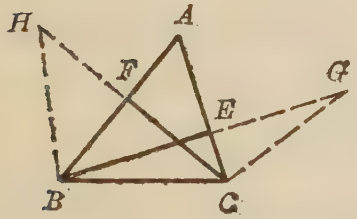


图 77-6

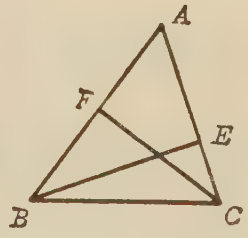


图 77-7

证四 如图 77-7，

$\because$ $Rt\triangle ABE\backsim Rt\triangle ACF$，

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CF}$，而 $AB>AC$，

$\therefore \dfrac{BE}{CF}>1$，即 $BE>CF$.

显然证四最简单，本题还有多种证法，请同学们考虑应该怎样证.

例 5 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点. 过 A 作直线

$EF \parallel O_1O_2$，分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 E、F，又过 A 任作一直线 CD，分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 C、D.

求证 $EF>CD$（图 77-8）.

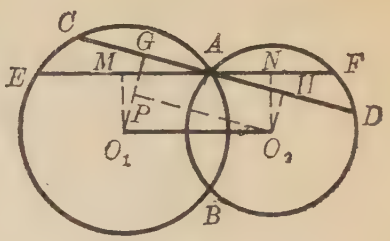


图 77-8

证明：作 O_1G、O_2H 垂直于 CD，垂足分别为 G、H，又作 O_1M，O_2N 垂直于 EF，垂足分别为 M、N.

则四边形 O_1MNO_2 为矩形.

$$\therefore\quad MN=O_1O_2=\frac{1}{2}EF.$$

过 O_2 作 $O_2P\perp O_1G$，垂足为 P，

则 O_2PGH 是矩形，

$$\therefore\quad O_2P=GH=\frac{1}{2}CD.$$

$$\because\quad O_2O_1>O_2P,$$

$$\therefore\frac{1}{2}EF>\frac{1}{2}CD,\text{ 即 }EF>CD.$$

本题实质上是通过平移，将要比较大小的线段，集中到一个三角形中来证明的. 这也是证明不等线段的常用技巧.

练习七十七

1. 已知 D 为 $\triangle ABC$ 内的一点，求证 $\angle BDC>\angle A$.

2. 梯形 $ABCD$ 中，若 AB 为大底，而 $AD>BC$，求证 $\angle B>\angle A$.

3. 如图 77-9，在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，AM 为 BC 边上的中线，P 为 AM 上任意一点. 求证 $\angle PBC>\angle PCB$.

4. 如图 77-10，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，P 为形内一点，且 $\angle APB>\angle APC$. 求证 $PC>PB$.

5．求证直角三角形的斜边与斜边上的高的和大于两直角边的和．

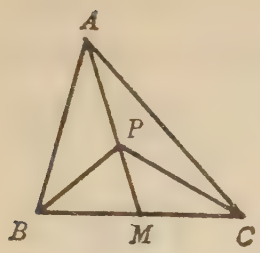


图 77-9

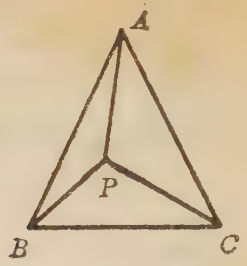


图 77-10

第 78 天　怎样证明线段的和差倍分

复习要求：

掌握证明线段的和差倍分的一些常用方法：

1．利用有关线段和差倍分的定理；

2．利用截长补短、加倍折半法，转化为证明线段相等．

例 1　在$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$．$AD\perp BC$，$BD=\frac{1}{2}AB$，AM是BC边上的中线，求证$BD=\frac{1}{2}AM$．

证明　如图 78-1，在$Rt\triangle ABD$中，

$\because$　$BD=\frac{1}{2}AB$，$\therefore$　$\angle BAD=30°$．

从而$\angle B=60°$，　$\therefore$　$AB=\frac{1}{2}BC$．

但　$AM=\frac{1}{2}BC$，$\therefore$　$AB=AM$．

$\therefore\quad BD=\frac{1}{2}AM.$

例 2 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$AD\perp AB$，$\angle BCD$ 的平分线 CM 过 AD 的中点 M. 求证 $AB+CD=BC$.

证一 如图 78-2，取 BC 的中点 N，连结 MN.

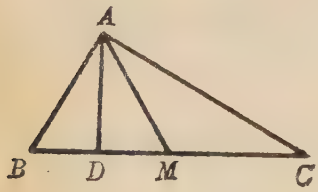


图 78-1

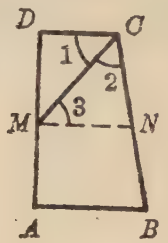


图 78-2

$\because\quad AB\parallel DC,$

$\therefore\quad MN\parallel AB\parallel DC,$ 且 $MN=\frac{1}{2}(AB+CD),\qquad (1)$

于是 $\angle 3=\angle 1$，但 $\angle 2=\angle 1$，$\therefore\quad \angle 2=\angle 3,$

$\therefore\quad MN=NC=\frac{1}{2}BC.\qquad (2)$

由(1)、(2)得 $AB+CD=BC.$

证二 如图 78-3，在 CB 上截取 $CN=CD$，连结 MN，则 $\triangle CDM\cong\triangle CNM$.

$\therefore\quad \angle 3=\angle D=90^\circ, MN=MD=MA.$

连结 MB，则 $Rt\triangle BMN\cong Rt\triangle BMA.$

$\therefore\quad NB=AB.$

从而 $AB+CD=CN+NB=BC.$

这里用的是截长法.

证三 如图 78-4，延长 BA、CM 交于 N，$\because AB\parallel CD$，则 $Rt\triangle CDM\cong Rt\triangle NAM$，$\therefore CD=NA$，$\angle 1=\angle 2.$

但 $\angle 1=\angle 2$，　$\therefore$ $\angle 2=\angle 3$，从而 $BN=BC$.

即　$AB+CD=BC$.

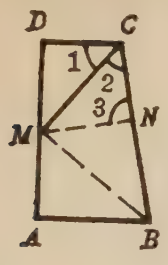


图　78-3

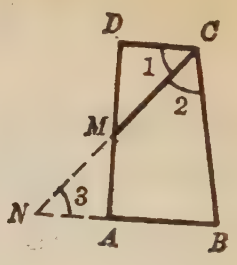


图　78-4

这里用的是补短法.

用截长补短法把线段的和差转化为证线段相等，这是证明中常用的方法.

例 3　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，E 为 AB 的中点，在 AB 延长线上取一点 D，使 $BD=BA$. 求证 $CD=2CE$.

证一　如图 78-5，取 CD 的中点 F，连结 BF.

$\because$　B 和 F 都是中点.

$\therefore$　$BF \parallel AC$，且 $BF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$.

又　$\angle 2=\angle ACB=\angle 1$，且 $BC=BC$，

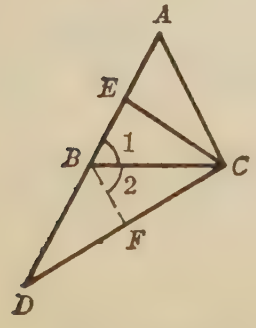


图　78-5

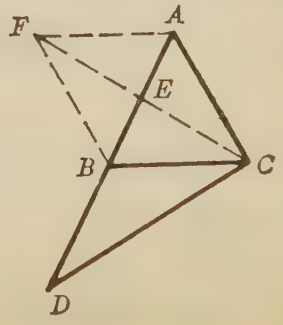


图　78-6

$\therefore$　$\triangle BCE\cong\triangle BCF$，$\therefore$　$CF=CE$.

即 $\frac{1}{2}CD=CE$，$\therefore$ $CD=2CE$.

证二 如图78-6，延长CE一倍到F，使$CF=2CE$，结AF、BF.

$\because$ $AE=BE$，$CE=EF$，

$\therefore$ $ACBF$为平行四边形.

$\therefore$ $FB\perp\!\!\!\perp AC=AB=BD$.

又 $\angle CBD=\angle ACB+\angle CAB=\angle ABC+\angle ABF$

$=\angle CBF$，且$BC=BC$，

$\therefore$ $\triangle BCF\cong\triangle BCD$.

$\therefore$ $CD=CF=2CE$.

证一用的折半法；证二用的是加倍法，折半或加倍，可以在原线段的基础上进行. 证一、证二也可“造出”新线段，如可以取AC的中点G，有$BG=CE$，且$BG=\frac{1}{2}CD$，从而得$CD=2CE$.

例4 在$\odot O$内作两直径$AB\perp CD$，过OD的中点E作弦AM，令AB与MC的交点为F，求证：$MA=2MB$(图78-7).

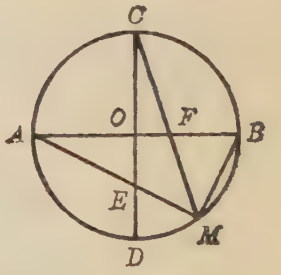


图 78-7

证明 在$\triangle ABM$和$\triangle AEO$中，

$\because$ $\angle A=\angle A$，$\angle AMB=\angle AOE=90°$，

$\therefore$ $\triangle AMB\backsim\triangle AOE$，

$\therefore$ $\frac{MA}{MB}=\frac{OA}{OE}$.

而E为OD的中点，则$OE=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}OA$，

$\therefore\frac{MA}{MB}=2$，即$MA=2MB$.

本例说明，我们也可以通过比例线段来证明线段的倍分关系.

练习七十八

1. 设 P 是正三角形 ABC 的外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上任一点. 求证 $PA=PB+PC$(图 78-8).

2. 在△ABC 中，$AD\perp BC$，M 是 BC 边上的中点，若 $\angle B=2\angle C$，求证 $DM=\frac{1}{2}AB$（图 78-9).

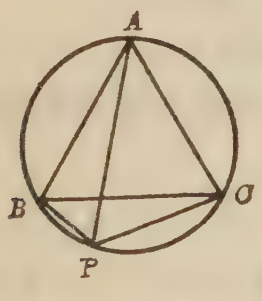


图 78-8

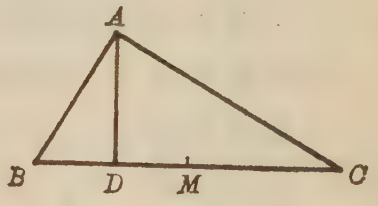


图 78-9

3. $ABCD$ 是正方形，P 是 BC 上任意一点，$\angle PAD$ 的平分线交 CD 于 Q. 求证 $DQ=AP-BP$(图 78-10).

4. 在 $\odot O$ 内，弦 $AB\perp$弦 CD，垂足为 E，由圆心 O 引 $OF\perp BD$，垂足为 F，则 $OF=\frac{1}{2}AC$(图 78-11).

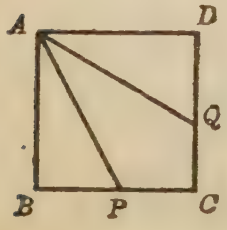


图 78-10

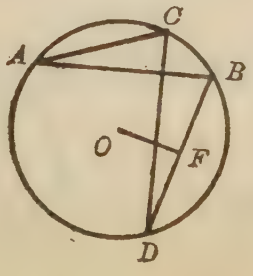


图 78-11

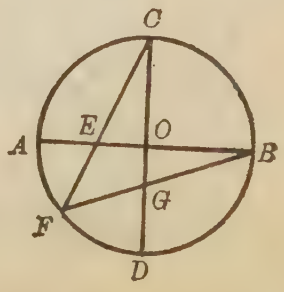


图 78-12

5. 在⊙O中，直径AB⊥直径CD，E为OA的中点，CE交⊙O于F点，BF交OD于G，则$OG=\frac{1}{3}OD$（图78-12）。

第79天　怎样证明角的和差倍分

复习要求：

掌握证明角的和差倍分的一些常用方法：

1. 利用有关角的和差倍分的定理；

2. 利用截大补小、加倍折半法，转化为证明角的相等；

3. 利用代数法。

例1　在△ABC中，$\angle B>\angle C$，点O在AB上，以O为圆心，OB为半径的圆交BC于M，延长MO与CA的延长线交于D.求证：$\angle D=\angle B-\angle C$.

证一　如图79-1，∵　$OB=OM$，

∴　$\angle B=\angle 1$.

而$\angle 1=\angle C+\angle D$，　∴　$\angle B=\angle C+\angle D$.

即　$\angle D=\angle B-\angle C$.

证二　如图79-2，作$\angle ABN$（即$\angle 1$）$=\angle D$，交AC于

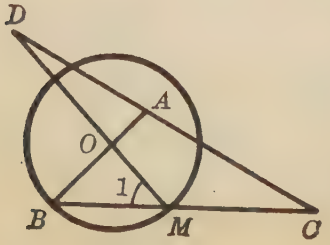


图　79-1

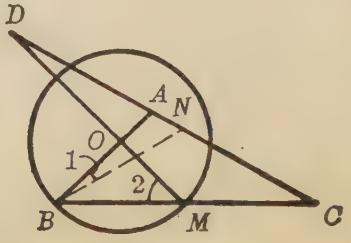


图　79-2

N，则$\angle NBC=\angle ABC-\angle D$.

又　$\angle C=\angle 2-\angle D=\angle ABC-\angle D$.

∴　$\angle NBC=\angle C$，即$\angle ABC-\angle D=\angle C$.

∴　$\angle D=\angle ABC-\angle C$.

这是用的截大法.

证三　如图 79-3，过 C 作 $CN\parallel DM$，交 BA 的延长线于 N，

则　$\angle 1=\angle D$，$\angle NCB=\angle 2$.

∵　$OB=OM$，∴　$\angle 2=\angle B$，

∴　$\angle NCB=\angle B$，即$\angle D+\angle ACB=\angle B$.

∴　$\angle D=\angle B-\angle ACB$.

这里用的是补小法.

例 2　$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，CD 为 AB 上的高. 求证 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

证一　如图 79-4，∵　$AB=AC$，　∴　$\angle B=\angle ACB$.

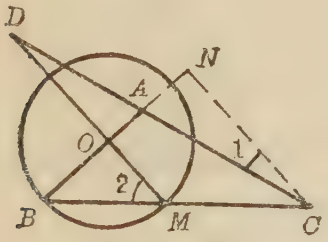


图　79-3

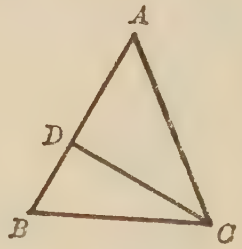


图　79-4

在$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 中，据内角和定理，有

$$\angle BCD=90^\circ-\angle B$$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle ACB)-\angle B$$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+2\angle B)-\angle B$$

$$=\frac{1}{2}\angle A.$$

这里用的是“代数法”，这种方法对证明三角形内角的和差倍分问题具有普遍意义．把 $90°$ 用 $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)$ 来代替，是证明这类问题的常用方法．

证二 如图 79-5，过 C 作射线 CE 交 AB 于 E，使 $\angle DCE=\angle BCD$.

$\because$ $CD\perp BE$，$\therefore$ $\triangle CBE$ 是等腰三角形．

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CBE$ 中，它们的底角对应相等，所以顶角必相等，即 $\angle BCE=\angle A$.

$\therefore$ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

证三 如图 79-6，作 $\angle A$ 的平分线 AE 交 BC 于 E，据等腰三角形顶角平分线的性质得 $AE\perp BC$.

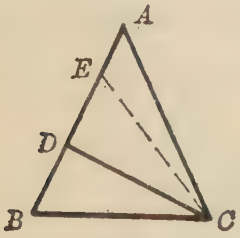


图 79-5

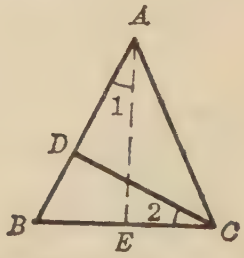


图 79-6

在 $Rt\triangle BCD$ 和 $Rt\triangle BAE$ 中，

$\angle 1+\angle B=\angle 2+\angle B=90°$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，即 $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle A$.

这里用的是折半法．

例 3 设 $\odot O$ 的直径为 AB，半径 $OC\perp AB$，D 为 OC 的中点，过 D 作弦 $EF\parallel AB$，求证 $\angle CBE=2\angle ABE$.

证明 如图79-7，连结OE.

$\because$ $OC\perp AB$，$EF\parallel AB$，

$\therefore$ $EF\perp OC$.

$\because$ $OD=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}OE$，

$\therefore$ $\angle OED=30°$，$\angle EOC=60°$.

于是$\angle AOE=\angle OED=30°$.

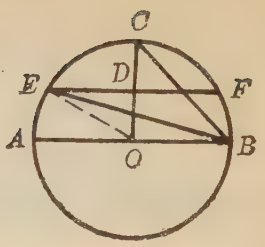


图 79-7

$\therefore$ $\overset{\frown}{EC}\overset{m}{=}2\ \overset{\frown}{AE}$.

$\therefore$ $2\angle CBE=2\cdot(2\angle ABE)$，即$\angle CBE=2\angle ABE$.

例4 在$\triangle ABC$中，$\angle C>\angle B$，AT为$\angle A$的平分线，AH为BC边上的高，求证：$\angle TAH=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B)$.

证明 如图79-8，

$\because$ $\angle ATH=\angle B+\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle B+\angle C)=90°$，

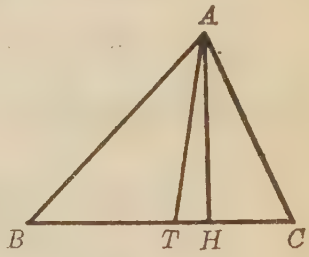


图 79-8

$\therefore$ 在$\triangle TAH$中，有

$$\begin{aligned}\angle TAH&=90°-\angle ATH\\&=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle B+\angle C)-(\angle B+\frac{1}{2}\angle BAC)\\&=\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).\end{aligned}$$

练习七十九

1. 两圆相交于P、Q两点，一外公切线切它们于A、B，则$\angle APB+\angle AQB=180°$(图79-9).

2. 如图79-10，在$\triangle ABC$中，$BC<BA$，以B为圆心，

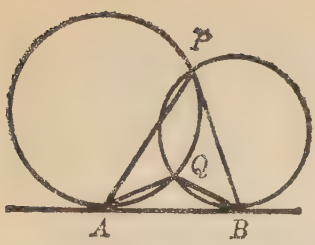


图 79–9

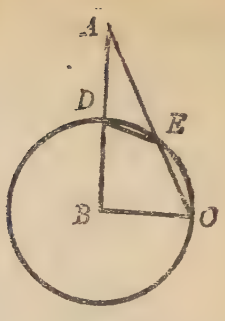


图 79–10

BC 为半径的圆交 CA 于 E 点，且与 BA 交于 D 点，求证 $\angle DEA=\frac{1}{2}\angle ABC$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，在 AC 上取 D 点，使 $AD=AB$，则 $\angle DBC=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 的平分线相交于 E，求证 $\angle AEB=\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$.

5. 正方形 $ABCD$ 的边 DC 的中点是 E，F 是 EC 的中点，求证 $\angle FAB=2\angle DAE$.

第 80 天　怎样证明两直线垂直

复习要求：

掌握证明两直线垂直的一些常用方法：

1. 利用垂直的定义或已知直角；
2. 利用直角三角形的判定定理；
3. 利用等腰三角形中三线合一的性质；
4. 利用菱形(正方形)中对角线的性质；
5. 利用圆中有关线段的垂直关系；

6．利用其他直线(线段)作介绍。

例 1 已知正方形 $ABCD$ 中，F 是 AB 上的点，且 $BF=\frac{1}{4}AB$，E 是 BC 的中点，求证：$EF\perp ED$（图 80-1）。

证一 由题设知，在 $Rt\triangle EFB$ 和 $Rt\triangle DEC$ 中，

$$\frac{FB}{EC}=\frac{BE}{CD}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $Rt\triangle EFB\backsim Rt\triangle DEC$，

$\angle 1=\angle 2$.

$\because$ $\angle 2+\angle 3=90°$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=90°$，从而

$\angle DEF=90°$，

$\therefore$ $EF\perp ED$.

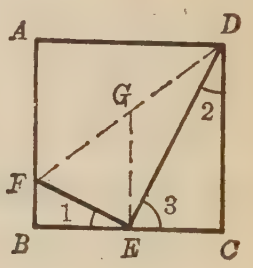


图 80-1

证二 连结 DF．设正方形的边长为 $4a$．据勾股定理，得

$EF^2=5a^2$，$DE^2=20a^2$，$DF^2=25a^2$

$\because$ $DF^2=EF^2+DE^2$，$\therefore$ $EF\perp ED$.

证三 连结 DF，取 DF 的中点 G，连结 EG.

$\because$ $DF=5a$，$\therefore$ $GD=GF=\frac{5a}{2}$。

$\because$ $BCDF$ 为梯形，$\therefore$ $GE=\frac{1}{2}(BF+CD)=\frac{5a}{2}$，

$\therefore$ $GD=GE=GF$，

从而 $EF\perp ED$.

例 2 如图 80-2，$\square ABCD$ 中，$AB=\frac{1}{2}BC$，延长 AB 至 F，使 $BF=AB$，延长 BA 至 E，使 $AE=BA$，求证 $EC\perp FD$.

证一 $\because$ $ABCD$ 是平行四边形，有 $DC\parallel AB$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle E$.

又 $EB=2AB=BC$，$\therefore$ $\angle 2=\angle E$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$.

同理可证 $\angle 3=\angle 4$.

而 $\angle ADC+\angle BCD=180°$，

$\therefore$ $\angle 1+\angle 3=90°$，

$\therefore$ $EC\perp FD$.

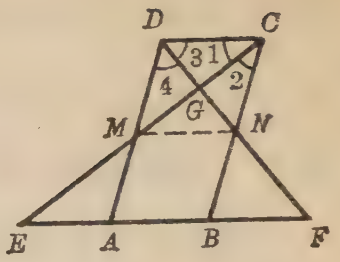


图 80-2

证二 设 EC 与 AD 交于 M，DF 与 BC 交于 N，连结 MN，由题设知

$\triangle CMD\cong\triangle EMA$

$\therefore$ $AM=DM=\frac{1}{2}AD$.

同理 $BN=CN=\frac{1}{2}BC$.

而 $AD\parallel BC$，$\therefore$ $MNCD$ 是平行四边形.

又 $DC=AB=CN\left(=\frac{1}{2}BC\right)$，

$\therefore$ $MNCD$ 是菱形，从而 $EC\perp FD$.

例 3 如图 80-3，设 D 是等腰直角三角形 ABC 的底边 BC 的中点，过 C、D 两点，但不过 A 点作一圆交 AC 于 E，连 BE 交圆于 F，则 $BE\perp AF$.

证明 连结 DF.

$\because$ 四边形 $CEFD$ 内接于圆，

$\therefore$ $\angle C=\angle BFD$.

但 $\angle C=\angle DAB=45°$，

$\therefore$ $\angle BFD=45°=\angle DAB$.

从而 A、B、D、F 四点共圆.

$\therefore$ $\angle AFB=\angle ADB=90°$，

即 $AF\perp BE$.

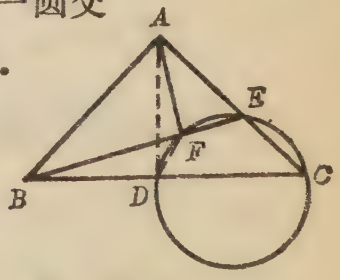


图 80-3

例 4 如图 80-4，圆内接四边形 $ABCD$ 的对边 AB 与 CD 交于 E，AD 与 BC 交于 F，则 $\angle E$ 与 $\angle F$ 的平分线互相垂直.

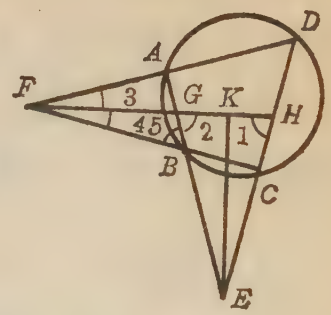


图 80-4

证明 设 $\angle E$ 与 $\angle F$ 的平分线交于 K，且 $\angle F$ 的平分线交 AB、CD 于 G、H，据外角定理，有

$$\angle 1=\angle D+\angle 3,$$

$$\angle 2=\angle 5+\angle 4.$$

而 $\angle 5=\angle D$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，从而 $EH=EG$.

$\because$ KE 为等腰 $\triangle EHG$ 的顶角平分线，

$\therefore$ $KE\perp GH$，即 $KE\perp FK$.

练习八十

1. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB+CD=BC$，O 为 AD 的中点，求证 $OB\perp OC$.

2. 求证等腰梯形对边中点连线互相垂直.

3. 已知 AB 切 $\odot O$ 于 A，OB 交 $\odot O$ 于 C，以 A 为顶点在圆内作 $\angle CAD=\angle CAB$，且 AD 交 OB 于 D，求证：$AD\perp OB$（图 80-5）.

4. 如图 80-6，已知 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 P，AB 是外公切

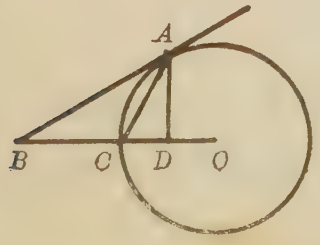


图 80-5

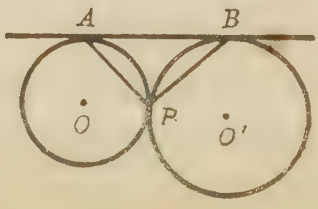


图 80-6

线，A、B 分别是两圆上的切点．求证 $PA \perp PB$．

5．已知在 $\odot O$ 中，两弦 AB、CD 相交于 E，且 $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$ = 半圆弧，求证 $AB \perp CD$．

第 81 天　怎样证明两直线平行

复习要求：

掌握证明两直线平行的一些常用方法：

1．利用平行线的判定定理；

2．利用三角形(梯形)的中位线定理；

3．利用平行四边形的判定定理；

4．利用比例线段；

5．利用在圆内不相交的两弦所夹的两弧相等；

6．利用其他直线或线段作介绍．

例 1　如图 81-1，两圆相交于 P、Q，过一圆上的点 A、B 各作直线 AP、AQ 及 BP、BQ，分别交另一圆于 C、D、E、F．求证 $CF \parallel DE$．

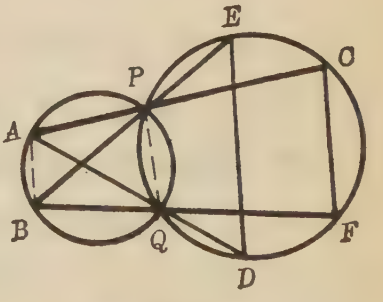


图 81-1

证明　连结 AB、PQ．

$\because$　$\angle ABE = \angle AQP = \angle E$，

$\therefore$　$DE \parallel AB$．

同理 $CF \parallel AB$．

$\therefore$　$CF \parallel DE$．

例 2　如图 81-2，在 $\triangle ABC$ 的中线 AD 上任取一点 P，直线 CP 和 AB 交于 E 点，直线 BP 和 AC 交于 F 点．求证 $EF \parallel BC$．

证明　延长 PD 到 G，使 $DG = PD$，连结 BG 和 CG．

∵ BC、PG 互相平分，

∴ $BGCP$ 是平行四边形，

∴ $BP \perp GC$，$CP \perp GB$.

∵ $BF \parallel GC$，

∴ $\triangle APF \backsim \triangle AGC$，

∴ $\frac{GC}{PF} = \frac{AG}{AP}$. 同理 $\frac{GB}{PE} = \frac{AG}{AP}$.

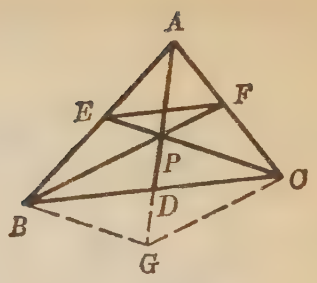


图 81-2

∴ $\frac{GC}{PF} = \frac{GB}{PE}$，即 $\frac{BP}{PF} = \frac{CP}{PE}$，

∴ $EF \parallel BC$.

例 3 如图 81-3，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径，自 O 作一射线交 $\odot O$ 于 E，且交过 B 点的切线于 C，过 C 作直线切 $\odot O$ 于 D. 求证：$AD \parallel OC$.

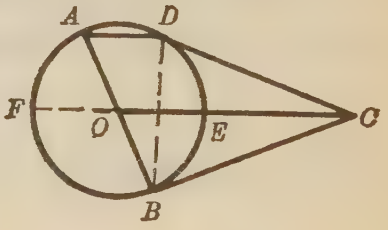


图 81-3

证明 延长 CO 交 $\odot O$ 于 F，连结 BD.

∵ CB、CD 是 $\odot O$ 的切线，

∴ $CD = CB$，且 CO 平分 $\angle BCD$.

从而 CO 平分 BD，且平分 $\overset{\frown}{BD}$，

即 $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DE}$. 又 $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BE}$，

∴ $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{DE}$，从而 $AD \parallel EF$，即 $AD \parallel OC$.

练习八十一

1. 如图 81-4，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于 P，过 P 任作一直线，分别交 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 A、B，过 A、B 分别作两圆的切线 AC、BD. 求证 $AC \parallel BD$.

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，E、F 分别为对角线 BD

和 AC 的中点．求证 $EF \parallel BC$．

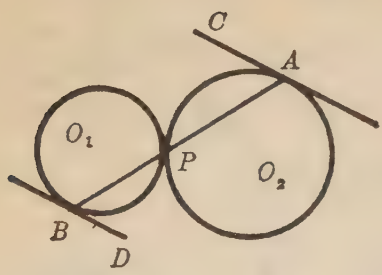


图 81-4

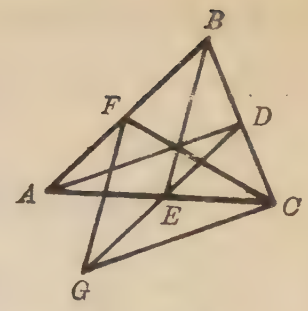


图 81-5

3．如图 81-5，已知 $\triangle ABC$ 中，AD、BE、CF 分别是 BC、AC、AB 上的中线，$FG \parallel BE$，交 DE 的延长线于 G．求证 $AD \parallel GC$．

4．过 $\square ABCD$ 的顶点 A、C 作一圆交 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H，求证 $EF \parallel GH$．

5．在 $Rt\triangle ABC$ 中，AD 是斜边 BC 上的高，$\angle B$ 和 $\angle CAD$ 的平分线分别交 AD、DC 于 E、F，求证 $EF \parallel AC$．

第82天　怎样证明线段的等比和等积

复习要求：

掌握证明线段的等比和等积的一些常用方法：

1．利用平行线分线段成比例定理及推论；

2．利用三角形内(外)角平分线的性质；

3．利用相似三角形；

4．利用直角三角形中的射影定理；

5．利用圆幂定理；

6．利用比例性质或等量代换．

例 1　如图 82-1，已知 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$AE \parallel DB$ 交 CB 延长线于 E，求证：$AB \cdot AD = BE \cdot DC$

分析： 要证 $AB \cdot AD = BE \cdot DC$

只要证 $\frac{AB}{BE} = \frac{DC}{AD}\left(\text{即}\frac{BA}{BE} = \frac{DC}{DA}\right)$，只要证含这四条线段的两个三角形相似即可.

证明 连结 AC. 在$\triangle BAE$ 和 $\triangle DCA$ 中，

$\because$ $AE \parallel DB$，$\therefore$ $\angle E = \angle 1 = \angle 2$.

又 $\angle ABE = \angle CDA$，

$\therefore$ $\triangle BAE \backsim \triangle DCA$.

$\therefore$ $\frac{BA}{BE} = \frac{DC}{DA}$，从而 $AB \cdot AD = BE \cdot DC$.

在寻找相似三角形时，要把相同的字母放在相同的位置（如本题的 B 和 D 均放在比例式各项的第一个位置），这样找到的相似三角形的顶点就是对应的了.

例 2 如图 82-2，已知以 $Rt\triangle ACB$ 的直角顶点 C 为圆

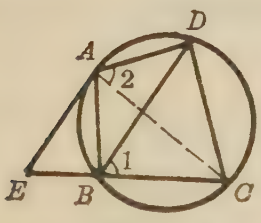


图 82-1

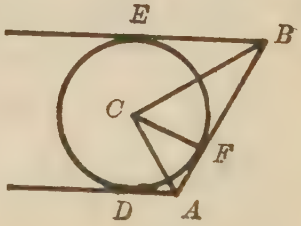


图 82-2

心，所作的圆切斜边 AB 于 F，过 A、B 分别作圆 C 的切线 AD、BE，切点为 D、E. 求证 $CF^2 = BE \cdot AD$.

分析：由等积式 $CF^2 = BE \cdot AD$ 推得比例式 $\frac{BE}{CF} = \frac{CF}{AD}$，得不到含这些线段的相似三角形. 但据切线长定理，知 $BE = BF$，$AD = AF$. 若以 BF 代 BE，AF 代 AD，则结论变为

求证$\frac{BF}{CF}=\frac{CF}{AF}$，此式可由射影定理而得到.

证明从略．请同学们自己完成.

例 3 如图 82-3，设一直线交 $\triangle ABC$ 三边于 F、E、D，且与 AB、AC 成等角，则$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CE}$.

分析： 如果要证的比例式不能直接由有关定理或相似三角形得到，则可通过作 $CG\parallel AB$，引进中间比$\frac{BF}{CG}$而获证.

证明 过 C 作 $CG\parallel BA$ 交 FD 于 G，则

$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CG}$.

又 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 4$，

$\therefore$ $\angle 3=\angle 4$，从而 $CE=CG$.

$\therefore$ $\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CE}$.

例 4 如图 82-4，已知 PAB 是圆的割线，PC 是圆的切线，C 为切点，$\angle BPC$ 的平分线交 AC 于 E，交 BC 于 F.

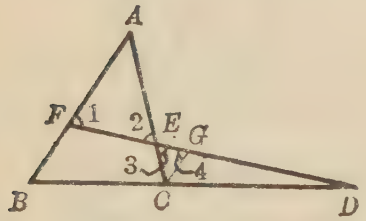


图 82-3

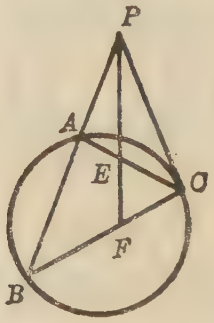


图 82-4

求证$\frac{AE}{EC}=\frac{CF}{FB}$.

分析： 如果要证的比例式不能直接由三角形角平分线

的性质或相似三角形等证得，可考虑引进中间比 $\frac{PA}{PC}=\frac{AE}{EC}$、$\frac{PC}{PB}=\frac{CF}{FB}$，再证$\frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}$即可.

证明 $\because \angle BPF=\angle FPC$,

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{PA}{PC}$, $\frac{CF}{FB}=\frac{PC}{PB}$.

$\because$ PC、PAB 分别为圆的切线和割线,

$\therefore$ $PC^2=PA\cdot PB$, 即$\frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}$.

$\therefore$ $\frac{AE}{EC}=\frac{CF}{FB}$.

例 5 如图 82-5，D 是 $Rt\triangle ABC$ 的直角边 AC 上的一点，过 D 作 AB 的垂线交 AB 于 E，交 BC 的延长线于 F，并交$\triangle ABC$ 的外接圆于 G. 求证 $EG^2=ED\cdot EF$.

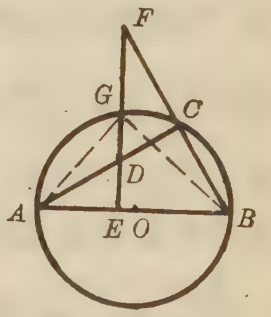


图 82-5

分析： 连结 AG、BG，由题设知 EG 是直角三角形 ABG 斜边 AB 上的高，可得 $EG^2=EA\cdot EB$，以 $EA\cdot EB$ 代换 EG^2，则结论变为求证 $EA\cdot EB=ED\cdot EF$，即$\frac{EA}{ED}=\frac{EF}{EB}$， 只须证 $Rt\triangle EAD\backsim Rt\triangle EFB$ 即可.

证明从略，请同学们自己写出证明过程.

从以上各例可知：

① 等积式可化为比例式来证明；

② 当要证的比例式不能直接应用有关定理或相似三角形来证明时，可考虑用等量代换. 等量代换通常有三种，即等线(段)代换、等比代换、等积代换，解题时要视具体情况灵

活选用.

练习八十二

1. 梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，F、G 为下底 CD 之三等分点，AF 与 BG 交于 P，且 AF 与 BD 交于 E. 求证 $\frac{AP}{PF}=\frac{AE}{EF}$.

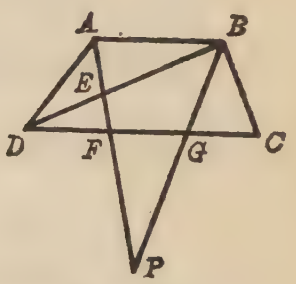


图 82-6

2. 由圆周上一点 P 引 PA、PB、PC 三弦，又任作割线 MN 与过 P 点之切线平行，设 MN 与 PA、PB、PC 交于 H、K、L，求证 $PA\cdot PH=PB\cdot PK=PC\cdot PL$.

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，BE 平分 $\angle B$ 交 CD 于 F，交 AC 于 E，求证 $\frac{AE}{EC}=\frac{CF}{FD}$.

4. 已知 C 为弦 AB 的中点，P 为圆上任意一点，切线 AD 交 PB 的延长线于 D，延长 DC 交 AP 于 E，求证：$\frac{AD^2}{BD^2}=\frac{PE}{AE}$（图82-7）.

5. 如图 82-8，已知在两个相交圆的公共弦 AB 上任取一点 C，过 C 作直线交一个圆于 D、E，交另一个圆于 F、

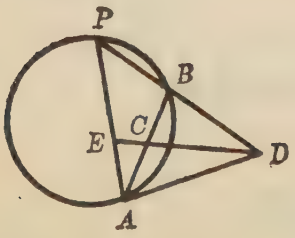


图 82-7

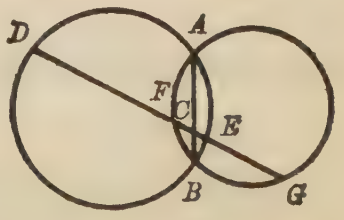


图 82-8

G. 求证 (1) $DC\cdot CE=FC\cdot CG$; (2) $\dfrac{DF}{FC}=\dfrac{GE}{EC}$.

第 83 天　练习八十三

1. BC 为半圆的直径，由半圆周上 A 点作 $AD\perp BC$，D 为垂足. 由 B 引弦 BG 交 AD、AC 于 E、F，使 A 为 $\overset{\frown}{BG}$ 的中点，则 $AE=BE=EF$(图 83-1).

2. 直线 l 与 $\square ABCD$ 的一组对边 AB、CD 相交，从各角顶点引 l 的垂线 AA'、BB'、CC'、DD'，A'、B'、C'、D' 为垂足. 求证：$AA'-CC'=DD'-BB'$(图 83-2).

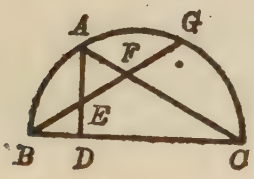


图 83-1

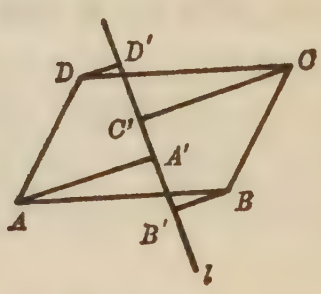


图 83-2

3. 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的外角平分线上任一点. 求证：$PB+PC>AB+AC$(图 83-3).

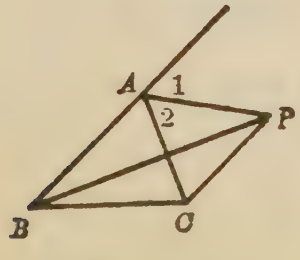


图 83-3

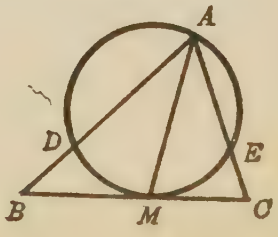


图 83-4

4. 已知 AM 是$\triangle ABC$的$\angle A$的平分线，过 A 作一圆与 BC 切于 M，又与 AB、AC 分别交于 D、E. 求证

$$\frac{DB}{EC}=\frac{BM}{CM}.$$

5. 设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外切于 P，一条外公切线各切 $\odot O$、$\odot O'$ 于 M、N. 过 P 任引一直线各交 $\odot O$、$\odot O'$ 于 A、B，则 $AM\perp BN$(图 83-5).

6. 在$\triangle ABC$中，BE、CF 分别是 $\angle ABC$、$\angle ACB$ 的平分线，$AE\perp BE$，交 BE 于 E，$AF\perp CF$ 交 CF 于 F. 求证 $EF\parallel BC$.

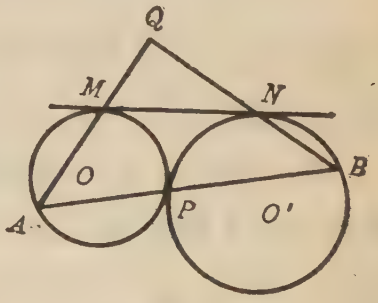


图 83-5

7. 在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=90°$，$AE\perp BC$，AD 是 BC 上的中线，AF 是$\angle CAB$的平分线. 求证 AF 平分 $\angle DAE$.

8. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，BD 为中线，DE 为 $\angle ADB$ 的平分线，如果$\triangle ADE$的外接圆与 BD 交于 F. 求证：$BF=2AE$.

第三部分　综合练习

第84、85天　北京市1988年初中升学试卷

一、填空：(本题共24分，其中1～6题各2分，7～10题各3分)

1. 0的相反数是____，$\frac{1}{2}$的倒数是____.

2. 正方形的边长是a，则它的对角线的长是____.

3. 两个相似形的相似比为3:4，则它们的面积比为____.

4. 已知方程$x^2-3x+1=0$的两个根为α、β，则$\alpha+\beta=$____，$\alpha\beta=$____.

5. 求值：$\operatorname{tg}45^\circ=$____，$\cos 30^\circ=$____.

6. 函数$y=2x+3$中，自变量x的取值范围是____.

7. 点$P(-3,4)$到坐标原点的距离是____.

8. 设θ是三角形的一个内角，且$\sin\theta=\frac{1}{2}$，则$\theta=$____.

9. 斜边为BC的直角三角形的顶点A的轨迹是____.

10. 半径为10cm，圆心角为72°的扇形的弧长是____cm.(精确到0.1cm)

二、(本题共23分，其中第1、2、3题各4分，第4题5分，

第5题6分）

1．分解因式：x^2y-4y.

2．计算：$\lg 1000+\lg 0.01$.

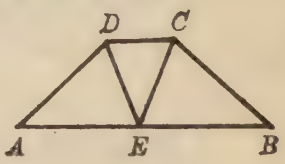
3．计算：$\sqrt{20}+\frac{1}{\sqrt{5}-2}-(\sqrt{5}+2)^0$.

4．已知：$(x+y-1)^2+\sqrt{2x-y+4}=0$.求实数$x$、$y$及$y^x$.

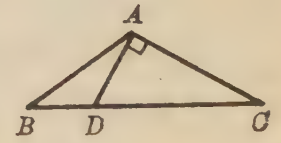
5．m取什么值时，方程$(m+2)x^2+2x-1=0$有两个不相等的实数根？

三、（本题共11分，第1题5分，第2题6分）

1．已知：如图，在梯形$ABCD$中，$AB\parallel DC$，$AD=BC$，E是AB的中点．求证：$ED=EC$.



2．已知：如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$AD\perp AC$，$DC=6$.求BD的长．



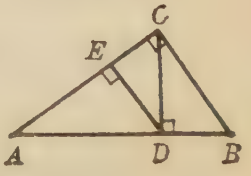
四、（本题共6分，每小题3分）

以下各题都给出代号为A、B、C、D的四个答案，其中有一个且只有一个是正确的，把正确答案的代号填在括号内．

1．$(-a^2)^3$的运算结果是（　　）．

A a^5　　B $-a^5$　　C a^6　　D $-a^6$

2．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，$DE\perp AC$，则图中和$\triangle ABC$相似（但不全等）的三角形的个数为（　　）．



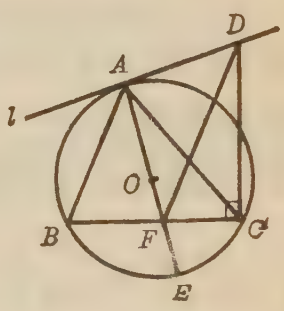
A 2　B 3　C 4　D 5

五、(本题共13分,其中第1题6分,第2题7分)

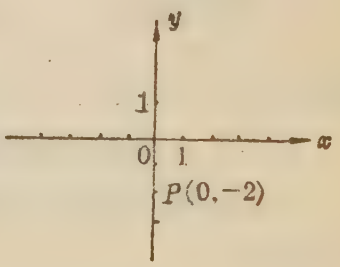
1. 列方程解应用题:有一个两位数,十位上的数是个位上的数的2倍,如果把这两个数的位置对换,那么所得的新数比原数小27,求这个两位数.

2. 解方程:$2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$.

六、(本题7分)已知:如图,$\triangle ABC$是$\odot O$的内接三角形,直径AE交BC于F,直线l切$\odot O$于A,$DC\perp BC$交l于D点.求证:$DF\parallel AB$.

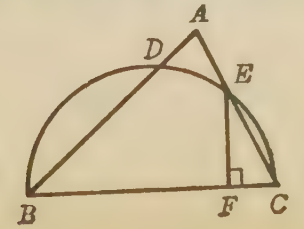


七、(本题5分)已知:一次函数的图象经过点$P(0,-2)$,且与两条坐标轴截得的直角三角形的面积为3,求这个一次函数的解析式.



八、(本题5分)已知:在$\triangle ABC$中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边分别为a、b、c,$\angle A=120°$,$\sin B:\sin C=3:2$,且$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle}=6\sqrt{3}$.求a的值.

九、(本题6分)已知:如图,以$\triangle ABC$的BC边为直径的半圆交AB于D,交AC于E,$EF\perp BC$于F,$BF:FC=5:1$,$AB=8$,$AE=2$,求AD的长.



第86、87天　南京市1988年初中升学试卷

一、填空：(每一空格1分，共24分)

1．(1) 如果 $\log_3 x=2$，则 $x=$____．

(2) lg0.001988 的首数是____．

2．点 $P(-2,\sqrt{3})$ 关于原点对称的点的坐标是____，点 P 到 y 轴的距离是____．

3．函数 $y=\sqrt{2x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是____．

4．函数 $y=\frac{5}{x}$ 是____函数；当 $y=5$ 时，$x=$____．

5．抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+4$ 的顶点坐标是____；对称轴是____．抛物线的开口向____．

6．角 α 的终边经过点 $P(2,5)$，则 $\operatorname{tg}\alpha=$____．

7．如果 $\cos 38^\circ=P(0<P<1)$，则 $\sin 52^\circ=$____．$\cos 142^\circ=$____．

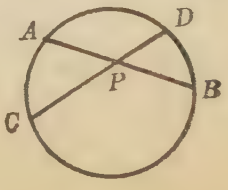
8．在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin C=1:3$，则 $a:c=$____．

9．一组数 11，7，10，9，13 的平均数 $\bar{x}=$____．

10．两个相似三角形的面积之比是 1:4，它们的对应中线之比是____．

11．已知两圆的半径分别为 2cm 和 5cm，当两圆相切时，圆心距是____．

12．如图，$AP=PB$，$CP=2$cm，$PD=1$cm，则 $AB=$____cm．



13．正多边形的一个外角等于36°，这个正多边形的边数是____．

14．已知正六边形外接圆的半径为 R，正六边形的周长是____．边心距是____．

15．扇形的面积是扇形所在圆的面积的$\frac{1}{5}$，这个扇形的圆心角是____．

16．如果一条直线截三角形的两边所得的对应线段成比例，那么这条直线_____三角形的第三边．

17．和 $\angle AOB$ 的两边 OA、OB 都相切的圆的圆心轨迹是_____．

二、解下列各题：（每小题4分，共16分）

1．计算 $\log_2 12-\log_2\frac{3}{2}$．

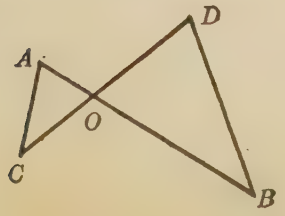
2．已知 $y-2$ 与 x 成正比例，且 $x=-1$ 时，$y=3$．求 y 与 x 之间的函数关系式，并画出这个函数的图象．

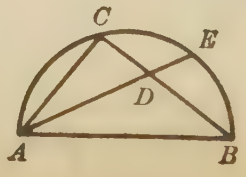
3．m 是什么实数时，二次函数 $y=x^2-(m-1)x+1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点？

4．在 $\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$b=8$，$c=3$．求 a．

三、（本题4分）

已知：如下左图，线段 AB 和 CD 相交于点 O，且 $DO=2AO$，$BO=2CO$．求证 $\angle A=\angle D$．





四、(本题6分)

已知：如前右图，C为半圆上的一点，直径$AB=10$，弦$AC=6$，E为$\overset{\frown}{BC}$的中点，AE与BC相交于点D.求BD、DC的长.

五、解下列各题：(每小题5分，共20分)

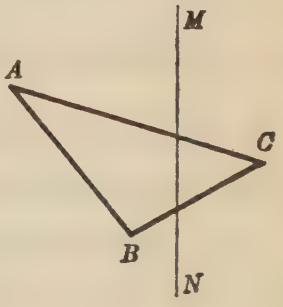
1. 分解因式 $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

2. 计算(1) $\sqrt{12}-\sqrt{3}\div(2+\sqrt{3})$

(2) $2^{-1}\times 8^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\pi}{2}\right)^0$

3. 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ \sqrt{xy}=2.\end{cases}$

4. 如右图，已知$\triangle ABC$和直线MN，作出$\triangle ABC$关于直线MN的对称图形.(保留作图痕迹，不写作法，不要证明.)



六、选择题：(每小题3分，共18分)

下面各题后面所附的答案中，有且只有一个是正确的，请将正确答案前面的字母符号填在题后的括号内.

1. 对于任何实数a，下列各式中正确的是(　　).

A $|a|=a$　B $\sqrt{(-a)^2}=a$　C $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$

D $\sqrt[3]{a^3}=|a|$

2. 一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$两个实数根异号的条件是(　　).

A $\frac{b}{a}>0$　B $\frac{b}{a}<0$　C $\frac{c}{a}>0$　D $\frac{c}{a}<0$

3. 下列各种说法中，正确的是(　　).

A 任何有理数都可以写出它的倒数

B　不论 a 是什么实数，a^2 永远大于零

C　一个数的平方不一定大于原数

D　两个实数的和是正数，这两个实数肯定都是正数

4．G 为△ABC 的重心，则△GBC 与 △ABC 的面积之比是(　　)．

A 1:2　　B 1:3　　C 1:4　　D 1:9

5．把含盐 $p\%$ 的盐水 a 千克，配成含盐 $q\%$ 的盐水，需要加盐 x 千克(其中 p、q、a 均为正数，且 $p<q$)，则列出的关于 x 的方程是(　　)．

A $a(1-p\%)=(a+x)(1-q\%)$

B $a\cdot p\%=(a+x)\cdot q\%$

C $a\cdot p\%=x+a\cdot q\%$

D $a(1-p\%)=x(1-q\%)$

6．在△ABC 中，$\angle B=50°$，$AB>AC$，则 $\angle A$ 的取值范围是(　　)．

A $0°<A<80°$　　B $50°<A<80°$

C $50°<A<130°$　　D $80°<A<130°$

七、(本题 6 分)

已知：如图，⊙O 是梯形 $ABCD$ 的内切圆，⊙O 的面积是 $3\pi cm^2$，梯形 $ABCD$ 的中位线长是 3.8cm，且 $\angle B=60°$．求梯形 $ABCD$ 的两腰 AB、CD 的长．

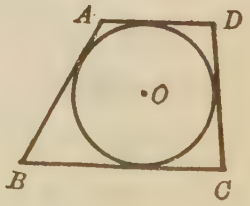


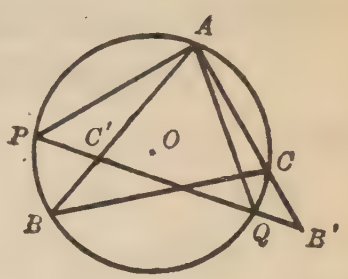
图 8-5

八、(本题 8 分)

某车间承包装配 50 台机器，由于他们改进了技术，每天多装配 2 台，结果比合同规定的天数提前 2 天完成承包任务，还多装配了 6 台。求合同规定的天数。

九、（本题10分）

已知：如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$AB>AC$，在 AB 上取一点 C'，使 $AC'=AC$，延长 AC 到点 B'，使 $AB'=AB$，直线 $B'C'$ 交 $\odot O$ 于 Q、P 两点．求证：



（1）$\angle AQP=\angle APQ$；

（2）$AQ^2=AB\cdot AC$．

十、（本题8分）

在 $\triangle ABC$ 中，A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$a\neq b$，且 $a\cdot\cos A=b\cdot\cos B$．

（1）判定 $\triangle ABC$ 的形状；

（2）若 a、b 是一元二次方程 $mx^2+2nx+4=0$（$m\neq 0$）的两根，求证：$m>\frac{8}{c^2}$．

第88、89天　杭州市1988年初中升学试卷

一、填空题：（每题3分，共30分）

1．计算：$|-3|=$_____．

2．计算：$\sqrt{4}=$_____．

3．分解因式：$x^2-1=$_____．

4．不等式 $2x-3<0$ 的解集是_____．

5．弦切角等于它所夹的弧对的_____角．

6．等腰三角形中，腰长 $a=b=5$，那么底边长 c 的取值范围是_____．

7．已知 y 与 x 成正比，且 $x=3$ 时，$y=1$，那么 y 与 x 之

间的函数关系式是_____.

8. 如果一个圆的周长等于 $2\sqrt{3}\pi$，那么这个圆的面积等于_____.

9. 用反证法证明命题“在同圆中，如果两条弧不等，那么它们的弦心距也不等”时，第一步应该假设_____.

10. 已知样本方差的计算公式是

$$S^2=\frac{1}{n}[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-n\bar{x}^2],$$

那么计算样本 3、−1、2、1、−3、3 的方差，得_____(结果保留一位小数).

二、选择题:(每个小题都提供了代号为 A、B、C、D 的四个备选答案，其中有且只有一个是正确的. 试把正确答案的代号填在各题后的括号内. 每小题 3 分，共 30 分)

1. 数轴上所有的点表示的数是(　　).

A 全体自然数　　B 全体有理数

C 全体无理数　　D 全体实数

2. $(-a^3)^2$的结果是(　　).

A a^5　B $-a^5$　C a^6　D $-a^6$

3. 当 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$ 时，下列四个式子中有意义的一个是(　　).

A $\sqrt{1-x^2}$　　B $\sqrt{x^2-1}$

C $\dfrac{1}{1-x^2}$　　D $\dfrac{1}{x^2-1}$

4. 已知方程 $x^2-4x+4=0$，那么它的根的情况是(　　).

A 没有实数根　　B 有两个相等的实数根

C 只有一个实数根　　D 有两个不相等的实数根

5．已知 x_1 和 x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两根，那么 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 等于(　　).

A 3　B -3　C $\frac{1}{3}$　D $-\frac{1}{3}$

6．已知 $x>0$，$y>0$，n 是大于 1 的整数，那么下列四个式子中，正确的式子是(　　).

A $\lg x+\lg y=\lg(x+y)$　B $\lg(x-y)=\frac{\lg x}{\lg y}$

C $(\lg x)^n=n\lg x$　D $\frac{1}{n}\lg x=\lg\sqrt[n]{x}$

7．已知函数 $y=x+3$，当 y 的取值范围是 $0\leqslant y\leqslant 3$ 时，x 的取值范围是(　　).

A $0\leqslant x\leqslant 3$　B $-3\leqslant x\leqslant 0$　C $-3\leqslant x\leqslant 3$　D 不能确定

8．已知两个三角形相似，它们的对应边的比是 2:3，周长的和是 20，那么这两个三角形的周长分别是(　　).

A 8 和 12　B 9 和 11　C 7 和 13　D 6 和 14

9．已知两个圆的半径分别 3 和 4，连心线的长是 1，那么这两个圆的位置关系是(　　).

A 内切　B 相交　C 外切　D 相离

10．下列命题中，真命题是(　　).

A 相似三角形是全等三角形

B 斜边为 AB 的直角三角形的直角顶点的轨迹是以 AB 为直径的半圆(点 A，B 除外)

C 直角三角形中，如果两边的长是 3 和 4，那么第三边的长是 5

D 圆的切线和圆有唯一公共点

三、(第 1 小题 4 分，第 2 小题 6 分，共 10 分)

1. 化简：$\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$（不用近似值表示结果）.

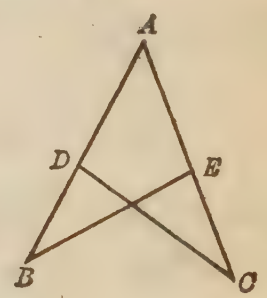
2. 解方程：$\sqrt{2x+3}=x$.

四、（每小题5分，共10分）

1. 菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O，已知 $AC=24\text{cm}$，$BD=18\text{cm}$. 求这菱形的边长.

2. 如图，已知：点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$.

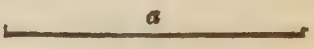
求证：$\angle BEC=\angle CDB$.



五、（8分）已知：线段 a（如图），

求作：$Rt\triangle ABC$，使斜边 $AB=a$，直角边 $AC=\dfrac{1}{2}a$.

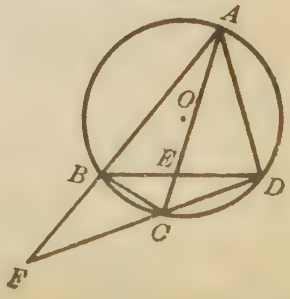
（要求用尺规作出图形，保留作图痕迹，写出作法，不要求证明.）



六、（8分）已知 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，$AB=6$，$AC=2\sqrt{3}$，$B=30°$，求角 C 和 $S_{\triangle ABC}$.

七、（8分）甲、乙两人分别从相距18公里的 A、B 两地同时出发，相向而行，2小时后相遇，以后两人都用原来的速度继续前进，结果甲到达 B 地比乙到达 A 地早54分钟. 试求甲、乙的速度。

八、（8分）如图，四边形 $ABCD$ 内接于圆，AC 和 BD 相交于点 E，AB 和 DC 延长后相交于点 F.



（1）求证：$\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{EC}{ED}$；

(2) 当 $BE^2=AE\cdot EC$ 时，求证：$\frac{AC}{EC}=\frac{2AF}{BF}$.

九、(8分) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象经过 $M(1-\sqrt{2},0)$、$N(1+\sqrt{2},0)$、$P(0,k)$ 三点.

(1) 如果△MNP 是直角三角形，且∠$P=90°$，试确定 a、b、c 的值.

(2) 如果△MNP 是钝角三角形，且∠P 是钝角，试确定 a 的取值范围.

第90、91天　南昌市1988年初中升学试卷

一、填空：(22分，每空2分)

1. 零的绝对值的相反数是_____.

2. 分解因式 $a^3b-ab^3=$_____.

3. 一个角等于它的余角的3倍，这个角等于_____.

4. 原命题"等腰梯形的对角线相等"的逆命题是_____.

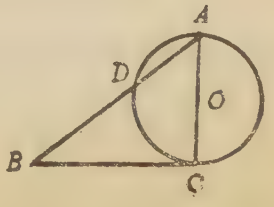
5. 计算：$2\cos60°+\operatorname{tg}45°=$_____.

6. 两点 $A(5,-3)$、$B(2,1)$ 间的距离是_____.

7. 两个相似三角形对应中线的比为1:3，则它们面积的比是_____.

8. 计算：$(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)=$_____.

9. 半径是30、弧长为 3π 的扇形的圆心角是____度.



10. 如图，$Rt\triangle ABC$ 的两条直

角边 AC、BC 的长分别为 3cm、4cm，以 AC 为直径作圆与斜边 AB 交于点 D，则 BD 的长是_____.

11. 从观察所得的数据中，取出 2 个 X_1，3 个 X_2，5 个 X_3，组成一个样本，那么这个样本的平均数 $X=$_____.

二、选择题：(20分，每小题 4 分)

1. 点 $P(3,-2)$ 关于原点的对称点的坐标是(　　).

A $(-2,3)$　B $(-2,-3)$　C $(-3,-2)$　D $(-3,2)$

2. ① $\lg(x+y)=\lg x-\lg y$；　② $\lg(x-y)=\lg x-\lg y$；

③ $\lg 2^3=3\lg 2$；　④ $\sqrt{\lg 2}=\frac{1}{2}\lg 2$.

以上式子成立的个数是(　　).

A 1个　B 2个　C 3个　D 4个

3. 对角线互相垂直且相等的四边形是(　　).

A 菱形　B 矩形　C 等腰梯形　D 以上结论都不对

4. 在△ABC 中，如果 $\sin A\cos A<0$. 则这个三角形是(　　).

A 锐角三角形　B 直角三角形

C 钝角三角形　D 不能确定

5. 若两圆半径分别为 R、$r(R>r)$，其圆心距为 d，且 $R^2+d^2-r^2=2Rd$，则两圆的位置关系一定是(　　).

A 内切或外切　B 内切　C 外切　D 相交

三、(24分，每小题 6 分)

1. 化简：$\frac{\sqrt{45}}{3}+\sqrt{\frac{9}{5}}-\frac{8}{\sqrt{20}}$.

2. 计算：$(0.25)^{-2}+\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\lg 16-2\lg 5$.

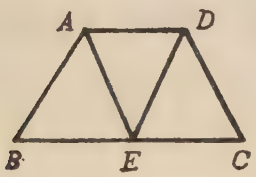
3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 $A(1,0)$、

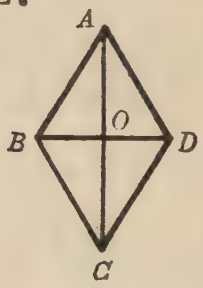
$B(0,6)$、$C(2,-2)$三点．求这个函数的解析式．

4．已知$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$BC=\sqrt{7}$，$AC:AB=2:3$，求三角形的面积．

四、(14分，每小题7分)

1．如下左图，在梯形$ABCD$中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$，E是BC的中点．求证$\angle BAE=\angle CDE$．





2．如上右图，已知菱形$ABCD$的周长为24cm，O为对角线AC、BD的交点，$\angle BAC=30°$．求菱形$ABCD$的面积．

五、(8分)

某中学学生到离学校15千米的西山植树，一部分同学骑自行车先走，40分钟后，另一部分同学乘汽车出发，结果他们同时到达，已知汽车每小时比自行车多走30千米．求汽车和自行车的速度．

六、(12分，每小题6分)

1．对于一次函数$y=(m+4)x+2m-1$，如果y随x增大而增大，且它的图象与y轴的交点在x轴下方．试求m的取值范围．

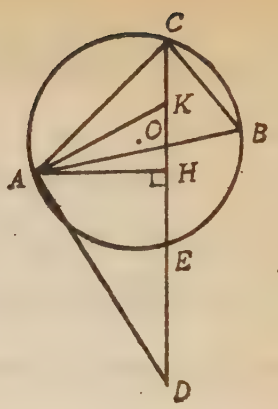
2．已知斜边为10的直角三角形的两条直角边a、b为方程$x^2-mx+3m+6=0$的两根．求m的值．

七、(10分)

如图，过$\triangle ABC$的顶点C和内心K的线段CD，与

$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 E，点 E 平分 KD，又 $AH \perp CD$.

求证：$\frac{AH}{AD}=\frac{AK}{2KE}$.



八、(10分)

已知：$\triangle ABC$ 中，三边长为三个连续整数，最大内角 C 是最小内角 A 的二倍。求这个三角形的三边长。

第92、93天　福建省1988年初中升学试卷

一、填空：(每小题2分，共30分)

1. 计算：$a(a^2)^m \div a^m =$ _____.

2. 若除式 $=x+2$，商式 $=2x+1$，余式 $=-5$，则被除式 $=$ _____.

3. 绝对值小于5且大于3的整数有_____.

4. 因式分解：$ax-a-bx+b=$ _____.

5. $\sqrt{16}$的平方根是_____.

6. 在 $m=\frac{x-a}{b-x}$ 中，$m \neq -1$，求出表示 x 的公式：_____.

7. 用对数形式表示 $2^x=7$ 中的 x，$x=$ _____.

8. 计算：$(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}=$ _____.

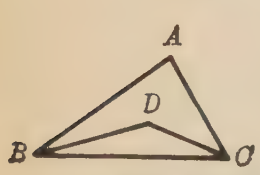
9. 已知角 α 的终边经过点 $P(-4,3)$，则 $\cos\alpha=$ _____.

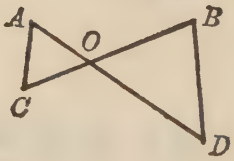
10. 计算：$\mathrm{tg}30^\circ \cdot \sin 60^\circ =$ _____.

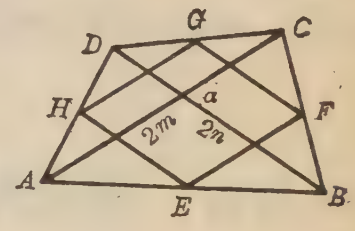
11．一个任意多边形的每一个外角都等于 40°，则它是____边形．

12．如下左图，已知△ABC 的重心为 D，则 △ABC 与△DBC 在 BC 边上的高的比为_____．

13．命题“在直角三角形中，两个锐角互余”的逆命题是_____．







14．如上中图，AD和BC 相交于 O，$OA>AC$，$BD>OB$，试比较∠C 和∠D 的大小：∠C____∠D．

15．如上右图，已知任意四边形 $ABCD$ 的两条对角线长分别为 $2m$ 和 $2n$，它们的夹角为 α，则顺次连结各边中点的四边形 $EFGH$ 的面积为_____．

二、选择题：（每小题 3 分，共 18 分）

本题共有 6 个小题，每小题都有 A、B、C、D 四个答案，其中有且只有一个答案是正确的，请你把认为正确的答案的代号，写在题后的括号内，答对得 3 分，答错、答案超过一个或不答得 0 分．

1．若 $a>0$，$b>0$，下列式子正确的是(　　)．

A $\lg(a+b)=\lg a+\lg b$　　B $\lg(a-b)=\dfrac{\lg a}{\lg b}$

C $(\lg a)^2=2\lg a$　　D $\lg\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\lg a$

2．为了考察某地初中毕业生数学毕业会考的情况，从中

抽查了400个考生的成绩.在这个问题中；总体是指(　　).

A 某地所有初中毕业生

B 某地所有初中毕业生毕业会考的数学成绩

C 被抽查的400名考生

D 被抽查的400名考生初中毕业会考的数学成绩

3. 当x取不大于$\frac{7}{3}$的值时，$3x-7$的值(　　).

A 大于0　B 不大于0　C 小于0　D 不小于0

4. 两座灯塔A和B与海岸观察站的距离相等，灯塔A在观察站的北偏东40°，灯塔B在观察站的南偏东60°，则灯塔A在灯塔B的(　　).

A 北偏东10°　　B 南偏东20°

C 北偏西10°　　D 南偏西20°

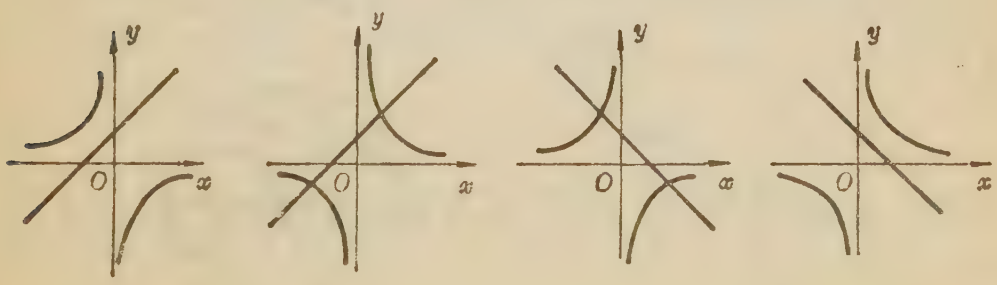
5. 一个圆内接四边形的四个内角(　　).

A 都是锐角　　B 只有一个直角

C 必定有钝角　　D 不能有三个钝角

6. 函数$y=\frac{k}{x}$与$y=x-k(k\neq 0)$在同一直角坐标系中的图象只可能是(　　).

A　　B　　C　　D



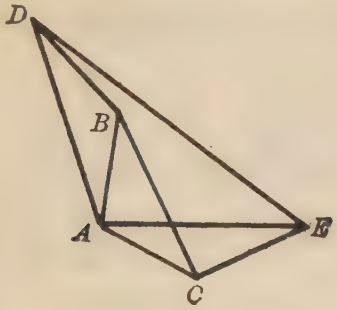
三、(每小题6分，共12分)

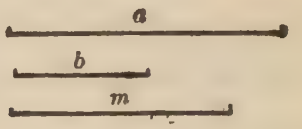
1. 如下页左图，已知△ABC和△ADE都是等腰三角

形，且顶角$\angle BAC=\angle DAE$，求证：$BD=CE$.

2．已知：线段a、b、m.

求作：一个等腰梯形，使它的一条底边等于a，腰等于b，对角线等于m.（要求尺规作图，保留作图痕迹，并写出作法，不要求证明.）





四、（每小题6分，共18分）

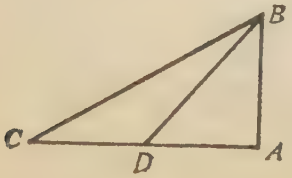
1．解方程：$\dfrac{x+4}{x^2+2x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2}{x}+1$.

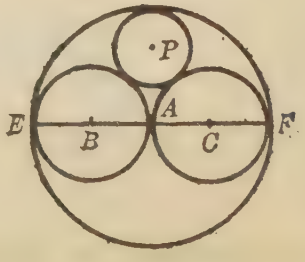
2．化简：$\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{2xy}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$.

3．在代数式$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$中，当$x=2$，$y=1$时，它的值是$-1$；当$x=1$，$y=2$时，它的值是7．求$a$、$b$的值.

五、（每小题6分，共12分）

1．如下左图，已知$Rt\triangle ABC$，$\angle A=Rt\angle$，$\angle C=30°$，且$AD=CD$．求$\sin\angle DBC$.





2．如上右图，已知⊙A、⊙B、⊙C、⊙P各圆两两相切，

EF 为⊙A 的直径，A 为⊙B 与⊙C 的切点，⊙P 的半径为 1cm，求 EF 的长。

六、（9 分）

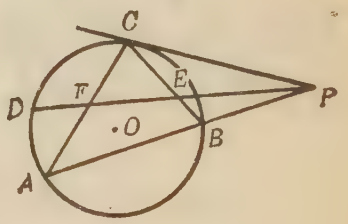
某项工程，若甲单独工作 2 天后，剩下的部分由乙去做，则乙还需要工作的天数等于甲单独完成此项工程的天数；若乙单独工作 2 天后，剩下的工程由甲去做，则甲还需要工作 3 天完成。问甲、乙单独完成此项工程各需要多少天？

七、（9 分）

已知：如图，⊙O 是△ABC 的外接圆，过 C 点作⊙O 的切线 CP 交 AB 的延长线于点 P，PD 为⊙O 一条割线，分别交 BC、AC 于 E、F，且 $CE=CF$。求证：(1) PD 是∠APC 的平分线；(2) $CF^2=AF\cdot BE$。

八、（12 分）

已知抛物线 $y=x^2-(m-3)x-m$。



(1) 试证：无论 m 为何值，抛物线与 x 轴总有两个交点；

(2) 试求：当 m 为何值时，抛物线与 x 轴的两个交点的距离等于 3；

(3) 用反证法证明：无论 m 为何值，抛物线与 x 轴的两个交点不可能都落在 x 轴的正半轴上。

第94、95天 上海市 1988 年部分中学直升考试卷

1988 年上海中学、南模中学、市二中学、上海师大附中直升考题。

一、选择题：（本题满分 25 分，每小题 5 分）

1．三角形两边中点的连线把三角形分成两部分，这两部分的面积比是（　　）．

A 1:2　　B 1:3　　C 1:4　　D 1:5

2．圆 O 的圆心在原点，半径为 3，又圆 A 的圆心坐标是 $(-\sqrt{3},1)$，半径为 1，则两圆关系是（　　）．

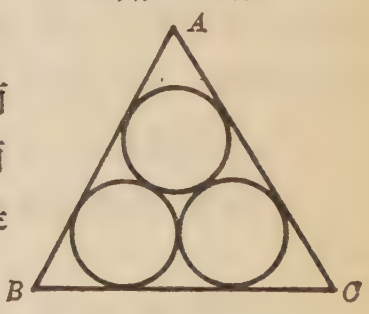
A 外切　　B 内切　　C 相交　　D 内含

3．$\triangle ABC$ 中，若 $\sin A\cdot\cos B<0$，则这个三角形是（　　）．

A 锐角三角形　B 直角三角形　C 钝角三角形

D 钝角三角形或直角三角形

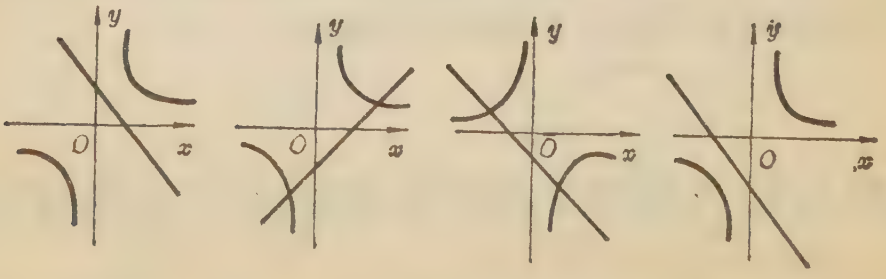
4．如图，三个半径为 1 的圆两两外切，且 $\triangle ABC$ 中每一边都与其中两个圆相切，那么 $\triangle ABC$ 的周长是（　　）．



A $12+3\sqrt{2}$　B $12+2\sqrt{3}$

C $12+3\sqrt{3}$　D $6+6\sqrt{3}$

5．如图，在同一直角坐标系中，函数 $y=mx+m$ 和 $y=\frac{m}{x}$ 的图象是（　　）。



A　　B　　C　　D

二、填空题：（本题满分 60 分，每格 4 分）

1．样本是：1、2、3、4、5．则平均数$\bar{x}$=_____，方差S^2=_____．

2．圆的直径与弦互相垂直，直径为10，弦长为6，则直径被弦分成较长与较短的两部分的比为_____．

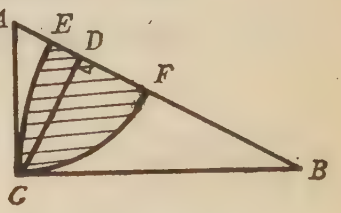
3．如果函数$y=(2m-1)x^{m^2-6m-6}$是图象在二、四象限的正比例函数，则m=_____．

4．两圆半径分别是4cm、6cm，圆心距为20cm，它们的内公切线长为_____，两内公切线的夹角为_____．

5．$\dfrac{\sin15^\circ}{4\cos75^\circ}+\dfrac{\sqrt{2}\sin45^\circ-2\cos^230^\circ}{\sqrt{3}\operatorname{ctg}60^\circ-2\cos0^\circ\cdot\sin120^\circ}$

=_____．

6．如右图，$\angle C=90^\circ$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，CD是AB上的高，以A为圆心，AC为半径画弧交AB于F，以B为圆心，BC为半径画弧交AB于E，则$\angle A$=_____，CD=____，$\overset{\frown}{CF}$的长为_____，阴影部分的面积为_____．



7．已知lg5=0.6990，lgsinα=−0.3010，则α=_____．（$0^\circ<\alpha<180^\circ$）

8．设sinα和cosα（$0^\circ<\alpha<180^\circ$）是关于x的方程$x^2-mx+m^{-2}=0$的两个根，则m=_____．

9．若$\triangle ABC$中，$AB=c$，$AC=b$，BC边上的高$AD=h$，则$\triangle ABC$的外接圆直径等于_____．

10．AB是$\odot O$的直径，以AB为底的$\odot O$的内接梯形对角线交点Q的轨迹是_____．

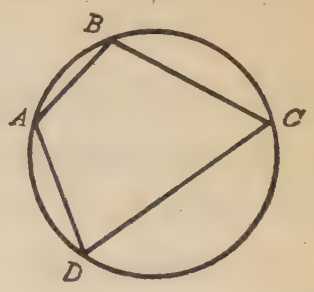
三、（本题满分10分）

当$3-2x<0$时，

求：$\sqrt{4x^2-4x+\sin 90^\circ}-\sqrt{2^{2\log_2 3}+4x^2-12x}$ 的值。

四、（本题满分 10 分）

在四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=4$，$BC=8$，$CD=9$，$DA=7$，当这四边形有外接圆时，求角 A 的正弦和余弦。（如图）



五、（本题满分 15 分）

三角形两角之和为 120°，此两角的正弦之比为 8:5，内切圆的周长为 $4\sqrt{3}\pi$。

求：（1）三角形的面积；

（2）三角形外接圆的半径；

（3）三角形中最小角的正切值。

第 96、97 天

上海市 1988 年初中毕业生等学校招生文化考试试卷

一、填空与作图：（本题共 25 小题，满分 50 分，每小题 2 分）

（1）计算：$4+(-5)=$ _____。

（2）计算：$\sqrt{(-3)^2}=$ _____。

（3）求值：$\lg 1=$ _____。

（4）求值：$\log_9 81=$ _____。

（5）如果 m 和 n 互为相反数，那么 $m+n=$ _____。

（6）把指数式 $3^2=9$ 写成对数式是_____。

（7）因式分解：$a^3-8=$ _____。

（8）当 $x=$ _____时，分式 $\frac{x-2}{x^2-4}$ 没有意义。

(9) 一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根的积是____.

(10) 计算：$\log_3 18-\log_3 2=$_____.

(11) 函数$y=\sqrt{2-x}$的自变量 x 的取值范围是____.

(12) 已知函数 $y=\sqrt{x}-\sqrt{10+x}$，当 $x=8$ 时，函数y的对应值是_____.

(13) 如果正比例函数的图象经过点$(-2,1)$，那么这个函数的解析式是_____.

(14) 当k_____时，函数$y=\frac{k}{x}$的图象在第Ⅱ、Ⅳ象限内.

(15) 在一个班的 50 名学生中，30 名男生的平均身高是 1.60 米，20 名女生的平均身高是 1.50 米，那么这个班学生的平均身高是_____米.

(16) 已知样本 4、0、2、1、-2，那么这个样本的标准差是_____.

(17) 在直角坐标系中，$\angle\alpha$ 的顶点在原点，它的始边与 x 轴的正半轴重合。终边上一点 P 的坐标是$(-\sqrt{2},\sqrt{3})$，那么 $\operatorname{ctg}\alpha=$_____.

(18) 在$\triangle ABC$ 中，已知$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，那么$\angle A$ 的度数为_____.

(19) 在直角三角形 ABC 中$(\angle C=90°)$，已知 $a=3$，$\angle A=30°$，那么 $b=$_____.

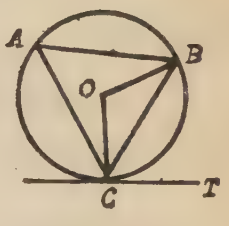
(20) 如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角_____.

(21) 如果三角形的三边长 a、b、c 有下面关系：$a^2+b^2=c^2$，那么这个三角形是_____.

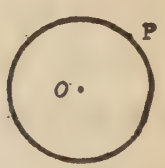
(22) 圆外切四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=2$，$BC=3$，$CD=4$，那么 $AD=$ _____.

(23) 已知扇形的半径为 4cm，面积为 8cm²，那么扇形的弧长 $l=$ _____cm.

(24) 如右图，$\odot O$ 的内接等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC$，$\angle BOC=100°$，CT 是 $\odot O$ 的切线，C 是切点，那么 $\angle ACT=$ _____度.



(25) 在右图中，过 $\odot O$ 上一点 P，用直尺和圆规作出 $\odot O$ 的切线（不要求写作法，但必须清楚保留作图痕迹）.



二、选择题：(本题共 5 小题，满分 10 分，每小题 2 分)

本题每小题给出的答案中，只有一个正确，把正确答案的代号填入括号.

(1) 化简 $-\dfrac{x^2-1}{1-x}$ 的结果是(　　).

A $x+1$　B $x-1$　C $1-x$　D $-x-1$

(2) 如果多边形的内角和是外角和的 2 倍，那么这个多边形的边数是(　　).

A 3　　B 4　　C 5　　D 6

(3) 如果三角形的三边长分别为 2、3、4，那么这个三角形的形状是(　　).

A 锐角三角形　B 钝角三角形　C 直角三角形

D 锐角三角形或钝角三角形

(4) 如果两圆的半径分别为 3 和 5，圆心距为 8，那么这

两个圆的公切线的条数是(　　).

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

(5) 已知 $\lg x=0.0064$，由《反对数表》查得尾数对应的四位数字是 1015；那么真数 x 是(　　).

A 1.015×10^{-3}　　B 1.015×10^{-2}

C 1.015×10^{-1}　　D 1.015

三、(本题共 4 小题，满分 24 分，每小题 6 分)

(1) 解不等式：$1-x\leqslant\frac{x}{3}-\frac{x+1}{6}$，并把这个不等式的解在数轴上表示出来.

(2) 解方程：$x^2+\sqrt{x^2-1}=3$.

(3) 求值：$\frac{\cos30^\circ}{\mathrm{tg}45^\circ}+\frac{\sin150^\circ}{\mathrm{tg}120^\circ-2}$.

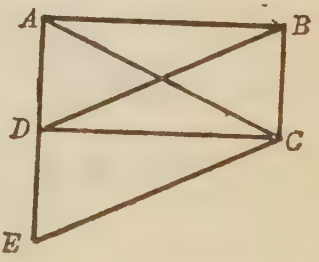
(4) 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=75^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$AB=\sqrt{6}$，求 AC.

四、(本题满分 8 分)

已知一次函数的图象经过两点 $A(2,-4)$ 和 $B(-4,5)$，求这个函数的解析式，并写出这个函数的图象在 y 轴上的截距.

五、(本题满分 8 分)

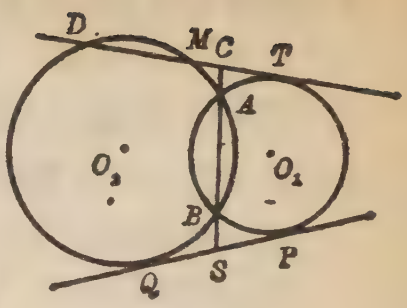
如图，已知：矩形 $ABCD$ 中，AC、BD 是对角线，过顶点 C 作 BD 的平行线与 AD 的延长线相交于点 E. 求证：$\triangle ACE$ 是等腰三角形.



六、(本题满分 10 分，第(1)小题 4 分，第(2)小题 6 分)

如图，已知 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，直线 PQ 分别与这两圆相切于点 P 和点 Q，直线 TD 与 $\odot O_1$ 相切于点 T，

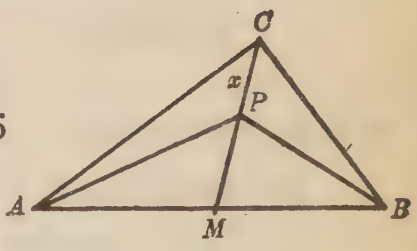
和 $\odot O_2$ 相交于点 M 和点 D，且点 M 是线段 TD 的中点，直线 AB 分别与直线 PQ 和 TD 相交于点 S 和点 C. 求：



(1) $SQ:SP$； (2) $CM:CT$.

七、(本题满分 10 分，第(1)小题 2 分，第(2)小题 6 分，第(3)小题 2 分)

如图，在直角三角形 ABC 中，$\angle C=90°$，已知 $AC=20$cm，$BC=15$ cm.



(1) 求 AB 边上中线 CM 的长；

(2) 在 CM 上取一点 P(点 P 与点 C、点 M 不重合). 求出 $\triangle APB$ 的面积 y(平方厘米)与 CP 的长 x(厘米)之间的函数关系式；

(3) 在直角坐标系中，画出这个函数的图象.

第 98 天　综合练习一

一、选择题：

1. 在函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ 中自变量 x 的允许值范围是(　　).

A $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$　　B $x>1$ 或 $x<-1$

C $-1<x<1$　　D $x\neq \pm 1$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\cos A\cdot\cos B<0$，则这个三角形的

图形只能是(　　).

A 锐角三角形　B $Rt\triangle$　C 钝角三角形　D 不能确定

3. 下列算式正确的是(　　).

A $(a-b)(a^2-ab+b^2)=a^3-b^3$

B $(\sqrt{2}-\sqrt{3})x>1 \Longrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

C 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\dfrac{1}{2} \Longrightarrow A=30°$

D $-x^2+2x-3<0$ 的解集是一切实数

4. 已知两圆的半径分别为 9 和 4，它们的外公切线长为 12，则这两个圆的位置关系为(　　).

A 相交　B 外切　C 外离　D 内切

5. 已知 $\lg M$ 的首数是 a，尾数是 b，则 $\lg\dfrac{1}{M}$ 的首数和尾数分别是(　　).

A $\dfrac{1}{a}$ 和 $\dfrac{1}{b}$　　B $a+1$ 和 $1-b$

C $-a-1$ 和 $1-b$　　D $a-1$ 和 $1+b$

二、填空题：

1. 多项式 $2x^3+9x^2+3x+5$ 除以一个多项式 A，商式为 $2x+1$，余式为 $5x+8$，则除式 A 是_____.

2. 已知 $0<b<1<a$，则点 $(\lg b, \lg a)$ 在第____象限.

3. 若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{3}$，则 $\dfrac{b-a}{a+b}=$_____.

4. 设 A 为钝角，化简：$\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\cos A}=$_____.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=7$，$AC=6$，AD 为 $\angle A$ 的平分线，则 $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle ACD}=$_____.

6. 圆内一弦把圆周分成长为 3:7 的两条弧，则劣弧所对

的圆周角为_____.

7. 梯形 $ABCD$ 外切于圆,它的中位线长为 7,则它的周长为_____.

8. 已知弧长为 l,它所对的圆心角是 120°,则它所在圆的半径是_____,它所对的弦是_____.

9. 在直角坐标系中,$\angle\alpha$ 的顶点在原点,始边为 x 轴正半轴,$\angle\alpha=150°$,在 $\angle\alpha$ 的终边上有一点 P,它的坐标 $(x,3)$,则 $x=$_____.

10. 如图 98-1,$\odot O$ 的圆心和直角坐标系的原点重合,$\odot O$ 的半径为 5,$\angle OAB=30°$. 则 B 点的坐标为_____.

11. 一次函数的图象是直线 AB,如图 98-2,$A(0,3)$,原点 O 到直线 AB 的距离是 2.4,则这个一次函数的解析式为_____.

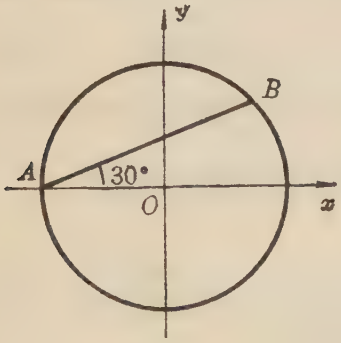


图 98-1

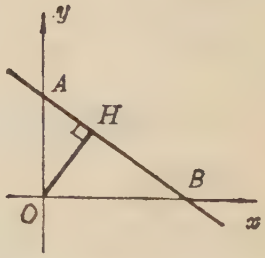


图 98-2

12. 已知样本为 101, 98, 102, 100, 99,则样本标准差为_____.

13. 已知在△ABC 中,$AB=2$, $BC=3\sqrt{3}$, $\angle B=150°$,则 $AC=$_____.

三、已知:如图 98-3,△ABC 中,$AB=AC$, M 为 BC 的中点,$MG\perp AB$, $MD\perp AC$, $GF\perp AC$, $DE\perp AB$, 垂足分别为 G、D、F、E, GF、DE 相交于 H,求证:四边形 $HGMD$

是菱形.

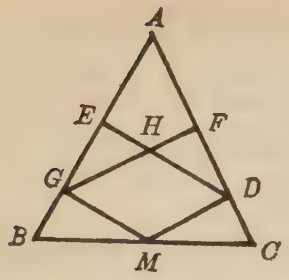


图 98-3

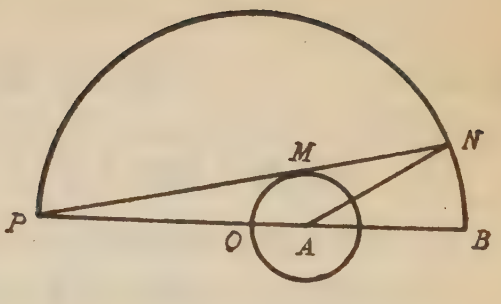


图 98-4

四、已知在$\triangle ABC$中，$\angle B=60°$，$\angle C=45°$，$AB+AC=17$，求AB和AC的长.

五、如图98-4,已知PB是$\odot O$的直径,点A在PB上,$\odot A$的直径是$\odot O$的半径的一半,且点O在$\odot A$上，弦PN与$\odot A$相切于M,$PN=8$. 求(1)$\odot A$的半径,(2)$\log_5\sin P$,(3) $S_{\triangle NAB}$.

六、如图98-5，已知$\square ABCD$，O为AC、BD交点，E、F分别是AB、BC的中点，DE、DF交AC于M、N，过C、N作圆与DF相切于N,BN的延长线交圆于G.

求证：(1) $AM=MN=NC$;

(2) $BN\cdot GN=CN^2$.

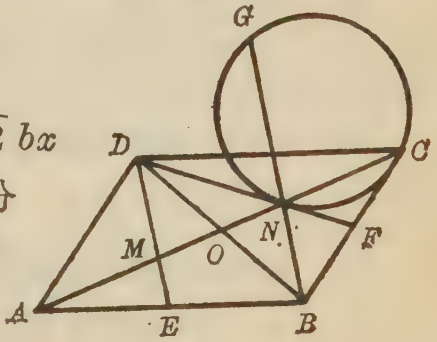


图 98-5

七、已知二次方程$ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$有实数根，其中a、b、c分别是$\triangle ABC$的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边.

(1) 证明方程的两根都是正根;

(2) 若方程两根相等,且$\angle B=90°$，求证$a=c$;

(3) 若$a=c$，又方程的两根x_1、x_2满足$|x_1-x_2|=\sqrt{2}$,求$\angle B$的度数.

第99天　综合练习二

一、填空题:(每格2分,共40分)

1. 已知 $\sin\alpha=\cos30°$ $(0°<\alpha<180°)$, 则 $\operatorname{ctg}\alpha=$ ____.

2. 以等边三角形的三条中线为边所围成的三角形与原三角形的周长比为_____.

3. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ 的自变量 x 的取值范围是____.

4. $\angle\alpha$ 的余角与 $\angle\alpha$ 的3倍互为补角,则 $\angle\alpha=$ ____.

5. 正三角形内切圆半径为 a,它的边长为_____.

6. 若方程 $x^2+x+k=0$ 有两个负数根,则 k 的取值范围是_____.

7. 在实数范围内分解因式 $x^3+2x^2-2x-4=$ _____.

8. 等腰三角形一腰上的高与底边夹角为60°,高为1,则腰长为_____.

9. 如果 $y=(m-1)x^{3-m^2}$ 是反比例函数,且在每个分支中 y 随 x 的增大而增大. 则 m 的值为_____.

10. 如果 $\log_3\sqrt{a^2}=2$, 则 $a=$ _____; 如果 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10^2}}=10^x$,则 $x=$ _____.

11. 菱形两条对角线长为8 cm和6 cm. 则它的面积等于_____; 若连结此菱形各边中点所构成的四边形是_____形.

12. 样本为1、2、-1、3、4、-3的标准差是_____. (结果保留根号)

13. A、B 两点关于 x 轴对称且点 A 的坐标为 $(-2,3)$,

则点 B 的坐标是_____；A、B 两点间的距离为_____.

14. 命题“各内角都等于 60° 的三角形是等边三角形”的否命题为_____.

15. 在△ABC 中，若 $2\cos B \cdot \sin A = \sin C$，则其形状为_____.

16. 在⊙O 中弦 AB、CD 垂直相交于 E，若线段 AE、EB 和 ED 的长分别是 2、6 和 3，那么⊙O 的直径长为____.

17. 已知 $a^2+a-1=0$，则 a^3+2a^2+3 的值为_____.

二、选择题：(每小题 2 分，共 10 分)

A、B、C、D 四个答案中有且只有一个正确，请把正确答案的代号填在括号内.

1. 若 $0°<\alpha<180°$，下列各组中互为负倒数的是(　　).

A $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$　　B $\sin\alpha$ 与 $-\cos\alpha$

C $\operatorname{tg}\alpha$ 与 $\operatorname{ctg}\alpha$　　D $\operatorname{tg}\alpha$ 与 $-\operatorname{ctg}\alpha$

2. 在△ABC 中，$\angle B=60°$，$AB=\sqrt{3}$，$AC=1.6$，则△ABC 的形状是(　　).

A 直角三角形　　B 锐角三角形

C 钝角三角形　　D 锐角三角形或钝角三角形

3. 化简 $|\lg 0.0845+1|$ 得正确答案是(　　).

A $1-\lg 0.0845$　　B $1+\lg 0.0845$

C $-\lg 0.0845-1$　　D $\lg 0.0845-1$

4. 化简 $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 结果是(　　).

A 1　B -1　C $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$　D $-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

5. 函数 $y=-kx+b$ 与 $y=-\frac{b}{x}$ 的图象是(　　).

如图99-1.

A　　B　　C　　D

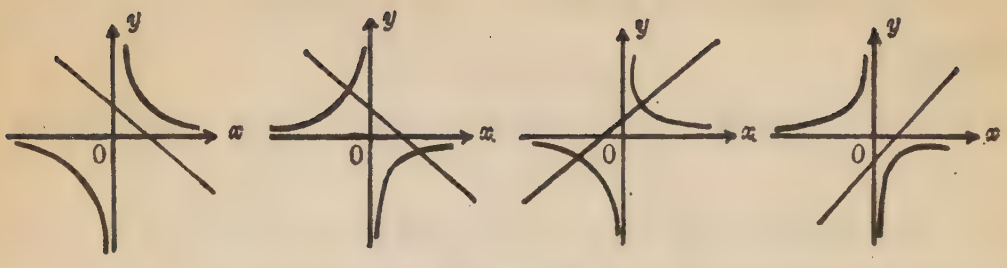


图 99-1

三、计算：

1.（4分） $\log_3 36-\log_3 4+10^{\lg 4}-(\log_3 1)\cdot(\log_3 3)$.

2.（5分） $(0.027)^{-\frac{1}{3}}+4^{1.5}-(-1)^{1987}$

$$+\frac{\sin 30^\circ}{\cos 60^\circ+\cos 135^\circ}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^0.$$

四、解方程式或不等式：

1.（5分） $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{2-x}=1-\dfrac{4x}{x^2-4}$.

2.（6分）解不等式 $1+\dfrac{x+8}{6}\geqslant x-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x+1}{3}$，并把它的正数解在数轴上表示出来.

五、（6分） 若直线 $y=k_1x+b$ 的截距为 2，它与双曲线 $y=\dfrac{k_2}{x}$ 的交点坐标为 $(-1,1)$.

（1）试写出直线与双曲线的解析式；

（2）在同一坐标系内画出两个函数的图象.

六、证明题：

1.（8分） 如图 99-2，BP 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线，BP 交 AC 的延长线于 P，Q 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，连接 BQ 交 AC 于 D.

求证：(1) $PD^2 = PA \cdot PC$；

(2) $\dfrac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}} = \dfrac{BC}{AB}$.

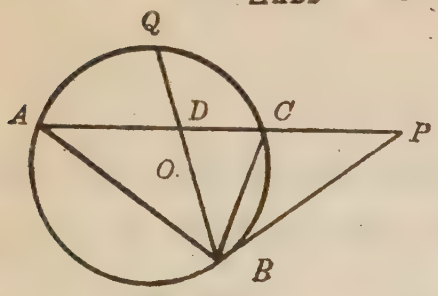


图 99-2

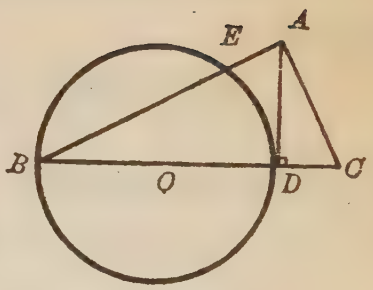


图 99-3

2.（7分） 已知：如图99-3，AD为$Rt\triangle ABC$斜边BC上的高，以BD为直径的$\odot O$交AB于E.

求证：$\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{BE}{AE}$.

七、(9分)

已知$\triangle ABC$内接于圆，AB为直径，$\angle A$、$\angle B$的正弦分别是方程$(m+5)x^2-(2m-5)x+12=0$的两个根，且圆的面积是25π.

求：(1) m的值； (2) $\triangle ABC$的面积；

(3) 当$\angle A$、$\angle B$各取何值时，$\triangle ABC$的面积最大？最大面积是多少？

第100天　综合练习三

福州市1988年初中数学试卷(完卷时间：120分钟)

一、填空：(每小题2分，共30分)

1. 绝对值最小的实数是_____.

2. 40的平方根是_____.

3．式子$\sqrt{xy^3}=-y\sqrt{xy}$成立的条件是_____．

4．等腰三角形的两条边长分别为4cm和9cm，那么它的周长是_____．

5．已知$\frac{x}{5}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}\neq 0$，则$\frac{x-y+z}{x-z}=$_____．

6．在$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC=Rt\angle$，$\angle C=60°$，斜边$BC=2$cm，则直角边AC在斜边上的射影的长是_____．

7．已知$\lg 2=0.3010$，若$\lg x=-1.3010$，则$x=$_____．

8．在实数范围内分解因式：$-2x^2+x+2=$_____．

9．函数$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的自变量x的取值范围是____．

10．若α是三角形的一个内角，且$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则$\cos\alpha=$_____．

11．一次函数$y=2x+b(b\neq 0)$的图象与x轴交于点A，坐标原点为O，则OA的长是_____．

12．如果扇形的圆心角为150°，弧长是20πcm，那么这个扇形的半径是_____．

13．已知抛物线$y=x^2+bx+c$与x轴相切，则不等式$x^2+bx+c>0$的解是_____．

14．已知一个样本为7、10、8、6、9，其方差$S^2=$____．

15．学生有m人，若每n人分配住一间宿舍$(m>n)$，还有一人没地方住，则宿舍的间数为_____．

二、选择题：(每小题3分，共18分)

A、B、C、D四个答案中有且只有一个正确，请把正确答案的代号填在括号内．

1．已知方程$kx^2-(2k+1)x+k=0$有两个不相等的实

数根，那么 k 的取值范围是(　　).

A $k>-\frac{1}{4}$　　B $k<-\frac{1}{4}$

C $k\geqslant-\frac{1}{4}$　　D 以上答案都不对

2. 三个实数 $a=4^{-0.5}$，　$b=4^{-\log_4 3}$，　$c=-\log_3\frac{1}{9}$的大小关系是(　　).

A　$a<b<c$　　B　$b<a<c$

C　$a>b>c$　　D　$a>c>b$

3. 下列命题中，否命题是真命题的是(　　).

A 矩形的对角线相等

B 线段垂直平分线上的点到这条线段两端点的距离相等

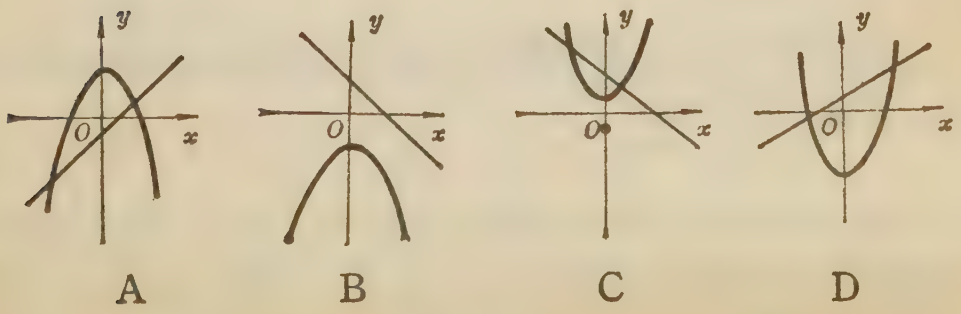
C 如果 $a^2>b^2$，那么 $a>b$

D 如果 $x=1$，那么 $x^2-1=0$

4. 一个正方形与圆有相等的周长，圆面积与正方形面积的比是(　　).

A $\frac{4}{\pi}$　　B $\frac{\pi}{4}$　　C $\frac{\pi}{2}$　　D $\frac{2}{\pi}$

5. 已知 a 与 k 异号，且 $bc<0$，那么函数 $y=ax^2+c$ 与



A　B　C　D

图 100-1

$y=kx+b$ 在同一坐标系内正确的图象是(　　).如图 100-1.

6．一个圆的圆心在原点，半径等于 3；另一个圆的圆心在点 $(\sqrt{3}, 1)$、半径等于 1，则这两个圆的公切线条数是(　　).

A 4　B 3　C 2　D 1

三、解答下列各题(每小题 6 分，共 30 分)

1．计算：$\dfrac{2\sin 120^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{ctg}150^\circ}-\sqrt{(\cos 30^\circ-1)^2}$.

2．计算：$\lg 12.5-\lg\dfrac{5}{8}+\lg\dfrac{1}{2}-2\log_2\sqrt{2}$.

3．解方程：$\dfrac{x^2+4}{x+1}+\dfrac{6x+6}{x^2+4}=5$.

4.已知：$y=z+3$，z 与 x 成反比例，且当 $x=1$ 时，$y=5$，

(1) 求 y 与 x 间的函数关系式；

(2) 当 $x=1$ 时，求 y 的值.

5．作图题：(要求写出作法并保留作图痕迹)

已知：P 是 $\angle AOB$ 的边 OA 上的一点(如图 100-2).

求作：一个圆，使它与 $\angle AOB$ 的两边都相切，且与 OA 切于 P.

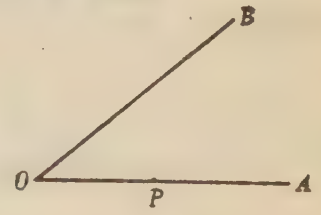


图 100-2

四、(8 分)

如图 100-3，已知四边形 $ABCD$ 为矩形，E 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点．求证：$DE=EC$.

五、(8 分)

如图 100-4，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=Rt\angle$，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$AB=10\text{cm}$ 且 $S_{\triangle BAD}:S_{\triangle BDC}=5:3$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

六、(8分)

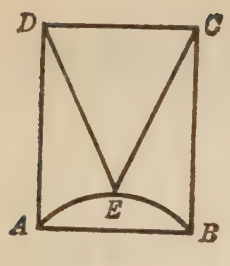


图 100-3

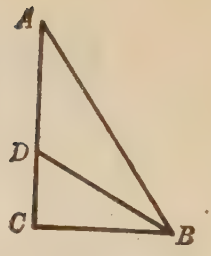


图 100-4

如图100-5，⊙O的半径为2，$\angle AOB=120°$，P是⊙O上一点，且$PA+PB=6$．求△PAB的面积．

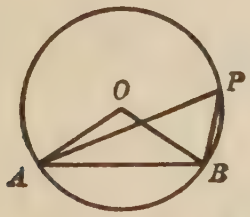


图 100-5

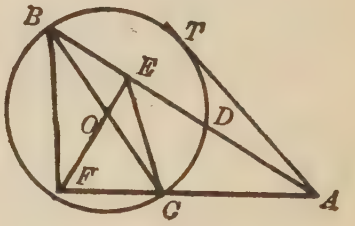


图 100-6

七、(8分)

如图100-6，从⊙O外的点A引⊙O的切线AT和割线ADB，切点为T，BC为直径，在AB上取点E，使$AE=AT$，过E作AB的垂线EF，与AC的延长线交于F．求证：$CE \parallel BF$．

八、(10分)

已知一次函数$y_1=-2x+1$与二次函数$y_2=ax^2+bx+c$，当自变量取2和-2时，都有$y_1=y_2$，且点$(\frac{1}{2}, -\frac{15}{4})$在二次函数的图象上．(1) 求二次函数解析式；(2) 在同一坐标系里作出这两个函数的图象；(3) 由图象观察，x取何值时，$y_1>y_2$．

练习题部分答案和提示

练习一

1. (1) 正数集合：cos60°，$\sqrt{2}$；无理数集合：$-\pi$，$\sqrt{2}$ (2) 原点，正方向和单位长度 (3) 0，-1；$x\leqslant 0$ (4) 非正数 (5) 1，-1 (6) $-2x$ (7) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3}$ (8) 2，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. (1) D (2) D (3) D (4) D (5) C (6) A (7) A

练习二

1. (1) $<$，$<$，$<$，$>$，$>$ (2) ① $-9<-4<0$，② $-5<-1<5$，③ $-1<8<10$ (3) 3.21×10^{-7} (4) 5.765×10^{4}，5.765×10^{-4}，4 (5) $>$，$<$，$>$ (6) ① $<$，② $<$，③ $>$，④ $>$

2. (1) C (2) B (3) B (4) D (5) D (6) C (7) E

练习三

1. (1) ±0.03，$\frac{3}{2}$，0，$-\frac{1}{2}$ (2) $\pm a$，$|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0)\\-a(a<0)\end{cases}$ (3) -8，$-\frac{1}{3}$，$\frac{3}{4}$，35，1 (4) 1 (5) $\pm\frac{6}{5}$，3 (6) 485.8，-0.1738，1.69×10^{-4} (7) ① 96.58，② 300.2，③ 0.4483，④ ±0.3002

(8) $4-2m$ (9) 0

2. (1) B (2) D (3) D (4) B (5) C

练习四

1. (1) 乘法交换律 (2) 乘法分配律 (3) 4.4

(4) ± 32 (5) $a^2 \geqslant 0$, $-a^2 \leqslant 0$ (6) $2n-1$, $2n+3$, $6n+3$

2. (1) D (2) D (3) B (4) C (5) D

3. (1) $22\frac{1}{4}$ (2) $105\frac{11}{12}$

练习五

1. (1) 4 (2) 0 (3) $\pm\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ (4) 3 (5) 5

(6) 0.1404 (7) $\sqrt{3}-1$ (8) $-3<-\frac{\sqrt{2}}{2}<0<\frac{2}{3}$

$<\sqrt{6}<\sqrt{2}+\sqrt{5}<6$ (9) 全都是 0

2. (1) B (2) B (3) D (4) D (5) B (6) D

3. (1) ① a 与 b 互为相反数， ② a 与 b 互为倒数，

③ a 与 b 中至少有一个为零， ④ $a=b=0$， ⑤ $a=b$，

⑥ a、b 不同时为零 (2) $1 \leqslant x \leqslant 5$ (3) 2 (4) $3x-1 \geqslant 0$，

$1-3x \geqslant 0$，则 $3x=1$，$x=\frac{1}{3}$，$y=9$，$\therefore \log_9 xy=\log_9 3=\frac{1}{2}$

(5) 13 (6) $4-4x$

4. (1) $-\frac{1}{5}$ (2) $-7\frac{1}{8}$ (3) $1\frac{1}{10}$ (4) $4.5-2\sqrt{2}$

(5) -4 (6) 12

练习六

1. (1) $(x-y)^3-(x^3-y^3)$ (2) a^{2n+1} (3) $2xy+ax$

(4) a^{4m}, a^{6n} (5) $-a^4$ (6) $\frac{a}{a+b}\times 100\%$ (7) x^2-x-1,

-4 (8) $\frac{9}{8}$

2. (1) A (2) B (3) C (4) C

练习七

1. (1) C (2) C (3) C (4) B (5) D

2. (1) $(1+0.01)(1-0.01)=1-0.0001=0.9999$

(2) $-b^3$, a^4, a^2b^3 (3) $\frac{8}{27}a^3-\frac{1}{8}b^3$ (4) -4

3. (1) $a^{2n+2}-2a^{n+1}y^{m+2}+y^{2m+4}$ (2) $a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2$ (3) $-2a^4-4a^3b+4ab^3+2b^4$ (4) 10

练习八

1. (1) C (2) B (3) C (4) A

2. (1) ① $2(x-1)(x^2+x+1)$, ② $a(a-1)(a-2)$, ③ $(x+9y)(x+2y)$, ④ $x^n(1+x)^2$, ⑤ $(a+b-2c)(a+b+2c)$, ⑥ $(x-2y+3)(x-2y+4)$, ⑦ $(x^2-x-1)(x^2+x-1)$ (2) ① $4a(1+a^2)(1-a)(1+a)$, ② $xy(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)(x^2+3y^2)$, ③ $(x-5-\sqrt{7})(x-5+\sqrt{7})$, ④ $2(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-2\sqrt{2})$, ⑤ $(a+2b)(a-2b)(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)$

3. $\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x-4)(x-1)$

练习九

1. (1) $(x^n+4y^n)(x^n+2y^n)$ (2) $4(x^2+1)^2$

(3) $\left(a-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(a-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)(a^2-5a+7)$

(4) $(x-2y-3)(x+y+2)$ (5) $m\leqslant\frac{17}{8}$ (6) $(a-1)(a^2+2a+2)$ (7) $(x+2)(x^2-2x+3)$

2. 0 **3**. 2

练习十

1. (1) $(25\%a-3b)^2$ (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $x+2y$ (5) a^4bc^2

2. (1) $8b^2-4ab$ (2) $x^2+2xy+y^2-1$ (3) $a^4-8a^2b^2+16b^4$ (4) $64x^6+16x^3y^3+y^6$ (5) $a^2-2ab+b^2$

3. (1) $x(x+3)(x-1)$ (2) $x^{2n}(x-1)^2$ (3) $a(a-b+c)(a-b-c)$ (4) $(y+x-3)(y-x+3)$ (5) $(x^2+x-1)\cdot(x^2-x-1)$ (6) $-2x^{n-1}y^n(x^n+y)^2(x^n-y)^2$ (7) $(ax-by-y)(ax-x+by)$ (8) $(x-2y+3)(x+3y-1)$

4. (1) $(a+\sqrt{2}\,b)(a-\sqrt{2}\,b)(a+\sqrt{5}\,b)(a-\sqrt{5}\,b)$ (2) $(x^2+9)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$

5. (1) D (2) B (3) C (4) B

6. $m=\pm1$ **7.** ∵ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$, $(x+y)^4=[(x+y)^2]^2=(x^2+xy+y^2+xy)^2$. 把$(x^2+xy+y^2)$看作$a$，$xy$看作$b$，则左边$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x^2+2xy+y^2)^2=[(x^2+xy+y^2)-xy]^2+[(x^2+xy+y^2)+xy]^2-2x^2y^2=2(x^2+xy+y^2)^2+2x^2y^2-2x^2y^2=2(x^2+xy+y^2)^2$

练习十一

1. (1) $x\neq0$ (2) -20 (3) -1 (4) $\frac{2a-1}{b}$ (5) $x=-1$，且$x=\frac{5}{2}$

2. (1) × (2) √ (3) × (4) × (5) ×

3. (1) C (2) D (3) B (4) C (5) D

4. (1) $-\frac{1}{a+1}$ (2) 1 (3) 1

练习十二

1. (1) $\frac{1}{x-1}$ (2) x^2 (3) $\frac{10x+3}{7x+2}$

2. (1) $\frac{x^6-a^6}{a^6x^6}$ (2) $\frac{c}{a}$ (3) 1 (4) $A=-2$, $B=2$ (5) $\frac{7}{12}$ (6) $4-2\sqrt{2}$

4. $x=\frac{3}{2}y$ 或 $x=\frac{4}{3}y$ 代入，得 $\frac{3}{11}$ 或 $\frac{4}{11}$

练习十三

1. (1) $a\leqslant 2$ (2) $a\geqslant 0$ (3) a 为一切实数 (4) $a=1$

2. (1) $x<3$ (2) $x>0$，且 $x\neq 4$ (3) $a=0$ (4) $-5<x<2$

3. (1) 不对，应为 $-2\sqrt{5}=-\sqrt{2^2\times 5}$ (2) 不对，应为 $2=5-3=\sqrt{(5-3)^2}=\sqrt{(3-5)^2}=-(3-5)$ (3) 不对，只有当 $x\geqslant 0$，则 $x^3=\sqrt{x^6}$；当 $x<0$ 时，$x^3=-\sqrt{(-x^3)^2}=-\sqrt{x^6}$ (4) 对的

4. (1) C (2) B (3) B

5. (1) $\frac{11}{2}+\frac{2-a}{2a}\sqrt{a}$ (2) $\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{10}$ (3) $ab+2b-a+1$ (4) $\frac{a+b}{ab}$

练习十四

1. (1) $a=1$, $b=-2$ (2) $2+3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) 0 或 $\sqrt[3]{4}$ (5) 71 (6) $12-8\sqrt{2}$ (7) $\frac{x^2-xy+1}{x^2y^2}$

2. (1) C (2) D (3) A (4) D

3. (1) $a^2-\frac{2a}{b}+\frac{1}{b^2}$ (2) a

练习十五

1. (1) ± 2 (2) 0或-1 (3) 2、3 (4) ① $-3x$, ② $-x$, ③$\sqrt{1-x}+1-x$ (5) $\sqrt{10}-3$ (6) ± 2 (7) $-44\sqrt{5}$ (8) 2

2. (1) D (2) B (3) A (4) A (5) C

3. (1) $-2\sqrt{2}$ (2) $\begin{cases} 4 & (n\text{为偶数}) \\ -4 & (n\text{为奇数}) \end{cases}$ (3) $2\sqrt{6}-15$

(4) $\begin{cases} x\sqrt{x} & (x>y) \\ -x\sqrt{x} & (x<y) \end{cases}$ (5) $\frac{7}{13}$ (6) 9 (7) -1

练习十六

1. (1) ① ×, ② ×, ③ ×, ④ ×, (2) √ (3) × (4) × (5) ×

2. (1) $k=\pm 6$ (2) $a=5$ (3) -2 (4) $195\frac{13}{14}$

3. (1) A (2) D (3) C (4) C

4. (1) $x=\frac{296}{107}$ (2) $y=\frac{4}{5}$ (3) $x=-\frac{2}{9}$或$x=-\frac{10}{9}$

(4) $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ (5) $y=\pm 2\sqrt{3}$ (6) $x_1=\frac{11}{7}$, $x_2=\frac{19}{3}$

(7) 当$a\neq\pm 2$时, $x=\frac{a^2+2a+4}{a+2}$; 当$a=2$时, 有无数多解; 当$a=-2$时, 方程无解

5. $k>0.5$, $k<0.5$, $k=0.5$

6. 当$a=2$时, 方程的根为-2, -1; 当$a=0$时, 方程的根为0, -3

练习十七

1. (1) $m=\pm 3$, $\triangle=8$ (2) $m=4$ (3) $m=1$

(4) $\alpha=-4$，$\beta=0$，$m=0$　(5) $\frac{5}{3}$

2. (1) C　(2) C　(3) B　(4) C

3. (1) $bc=0$ 或 $bc=-\frac{3}{8}$　(2) $m=-1$，$m=17$(舍去)

(3) ① 方程有两个不相等的实数根，② c 边所对的角是 120°

(4) $\begin{cases}a=-4\\b=3\\c=5\end{cases}$

练习十八

1. (1) $x=6\frac{1}{2}$　(2) $x_1=x_2=0$，$x_3=\frac{4}{5}$　(3) $x=11$

(4) $y^2-8y-20=0$　(5) $\sqrt{2x^2+3x+9}$，$y^2-5y-6=0$

2. (1) B　(2) B　(3) D

3. (1) $x_1=1$，$x_2=x_3=-3$　(2) $x_1=2$ 为增根，$x_2=3$

(3) $x_1=1$，$x_2=-2$(舍去)　(4) $x_1=1$，$x_2=3$　(5) $x=-3$

练习十九

1. (1) $x_1=-\sqrt{5}$，$x_2=\sqrt{3}$　(2) $a=2$ 或 $a=-1$，$x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$　(3) $b\neq 0$，$c=0$；$b=0$，$c=0$　(4) $a=2$，$x_1=1$，$x_2=2$　(5) $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$　(6) $k=\pm 2$

(7) x^2-2x+3，$y^2-4y-5=0$　(8) $x=2$，$y=3$

2. (1) A　(2) D　(3) B　(4) B

3. (1) $x=6$，$x=-1$ 为增根　(2) $x=10$，$x=\frac{22}{13}$ 为增根　(3) $\pm\sqrt{5}$，2　(4) $x_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$x_2=\frac{-\sqrt{6}}{3}$

(5) $x=0$，$x=-1$ 为增根　(6) $x_1=2$，$x_2=-4$，

$x_{3,4}=-1\pm2\sqrt{2}$ (7) $x_1=1$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $x_3=-3$, $x_4=\frac{1}{2}$

(8) $x_1=11$, $x_2=-9$

4. (1) ① $\triangle>0$，方程有两个不相等的实数根，② $\triangle=0$，方程有两个相等的实数根，③ $\triangle<0$，方程没有实数根 (2) 另一根为 -3，$p=1$ (3) $36x^2-161x+34=0$

(4) ① $0<m\leqslant 8\frac{1}{3}$，② $m<0$ (5) $x^2-5x+6=0$

(6) $k=2$，$m=1$ 或 $k=1$，$m=0$ (7) $|k|=1$

(8) $m=\frac{1}{2}$

练习二十

1. (1) $a=6$，$b=13$ (2) $m=8$，$n=-7$ (3) $a=2$，$b=1$ (4) $k=4$

2. (1) B (2) A (3) B

3. (1) $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=-6\\y=1\\z=2\end{cases}$ (5) $\begin{cases}x=2\\\\y=1\end{cases}$

4. $x=1.6$，$y=-0.2$ **5**. $m=3$

6. $a=3$，$b=4$，$c=-3$

练习二十一

1. (1) $\begin{cases}x_1=10\\y_1=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-2\\y_2=10\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=9\\y=6\end{cases}$ (3) 无解

2. (1) D (2) D (3) D (4) D

3. (1) $\begin{cases}x_1=1\\\\y_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=\frac{8}{15}\\\\y_2=\frac{1}{15}\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1=3\\\\y_1=0\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-1\\\\y_2=0\end{cases}$，

$\begin{cases}x_3=0\\y_3=1\end{cases}$，$\begin{cases}x_4=2\\y_4=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x_1=-\frac{2}{3}\\y_1=\frac{1}{3}\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=\frac{1}{2}\\y_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=-\frac{1}{2}\\y_3=\frac{1}{2}\end{cases}$，

$\begin{cases}x_4=\frac{2}{3}\\y_4=-\frac{1}{3}\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x_1=3\\y_1=2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-3\\y_2=-2\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=\frac{11}{12}\sqrt{11}\\y_3=\frac{3}{11}\sqrt{11}\end{cases}$，

$\begin{cases}x_4=-\frac{12}{11}\sqrt{11}\\y_4=-\frac{3}{11}\sqrt{11}\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x_1=1\\y_1=-10\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-1\\y_2=10\end{cases}$，$\begin{cases}x_3=10\\y_3=-1\end{cases}$，

$\begin{cases}x_4=-10\\y_4=1\end{cases}$

(6) $\begin{cases}x_1=2\\y_1=2\end{cases}$，$\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}\\y_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

4. (1) $\begin{cases}a_1=2\\b_1=3\end{cases}$，$\begin{cases}a_2=-2\\b_2=3\end{cases}$，$\begin{cases}a_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\\b_3=-\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}a_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\b_4=-\frac{1}{2}\end{cases}$

(2) 当 $a=0$ 时，公共根为 0，方程①的根为 0，4，方程②的根为 0,2；当 $a=\frac{3}{2}$ 时，公共根为 3，方程①的根为 3，2.5，方程②的根为 3，-2.5

练习二十二

1. (1) -4 (2) 0 (3) $m<2$，$m=-4$ (4) $4<k<4\frac{5}{2}$

2. $p>-6$ 3. $a\neq-\frac{20}{3}$，$a=-\frac{20}{3}$

4. $k_1=10$ 时，$\begin{cases}x_1=x_2=5\\y_1=y_2=30\end{cases}$；$k_2=-2$ 时，$\begin{cases}x_3=x_4=-1\\y_3=y_4=6\end{cases}$(舍去)

5. (1) $k=1$ (2) $k<1$，且 $k\neq0$ (3) $k>1$

6. $m \leqslant -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $m \geqslant \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 且 $m \neq -1$

练习二十三

1. (1) D (2) C (3) B

2. (1) 设 x 天后两厂剩下的煤相等，则 $120-15x=96-9x$，$x=4$(天)

(2) 设小明原来的速度为每小时 x 千米，小华速度为每小时 y 千米. $\begin{cases} 2(x+4)+2y=48 \\ \frac{2(x+4)}{y}=\frac{48-x}{x+y} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$

(3) 设取浓度为 60% 酒精 x 克，则取浓度为 90% 酒精 $(300-x)$ 克. $60\%x+90\%(300-x)=70\%\times 300$，$x=200$(克). $300-200=100$(克)

(4) 设每年增长 x，$50(1+x)^2=60.5$，$x=10\%$

(5) 设甲队单独完成要 x 天，乙队单独完成要 y 天.

$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{5}{x}+9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=20 \\ y=30 \end{cases}$

(6) 设这两位数为 $10a+b$，设一位数为 c.

$$\begin{cases} 10a+b=c^2 \\ 100c+10a+b-10(10a+b)-c=252 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \\ c=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=7 \end{cases}$ ∴ 这两位数为 16 或 49

练习二十四

1. (1) -3 (2) 12 或 -4 (3) $ba\%$，$\frac{ab\%}{b+c}$，

$\frac{ab\%+d}{b+c+d}$ (4) $\frac{1}{x+y+z}$

2. (1) D (2) A (3) C (4) A

3. (1) $\begin{cases}x_1=4\\y_1=1\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-4\\y_2=-1\end{cases}$, $\begin{cases}x_3=14\\y_3=-4\end{cases}$, $\begin{cases}x_4=-14\\y_4=4\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1=5\\y_1=-4\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=-4\\y_2=5\end{cases}$, $\begin{cases}x_3=-10+3\sqrt{11}\\y_3=-10-3\sqrt{11}\end{cases}$,

$\begin{cases}x_4=-10-3\sqrt{11}\\y_4=-10+3\sqrt{11}\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\frac{9}{49}\\y=\frac{25}{49}\end{cases}$ (5) $\begin{cases}x_1=2\\y_1=2\end{cases}$,

$\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2}\\y_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x=\frac{1}{2}(a+c-b)\\y=\frac{1}{2}(a+b-c)\\z=\frac{1}{2}(b+c-a)\end{cases}$

4. $k>\frac{20}{3}$ **5.** $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$

6. (1) 设原有桃树 x 棵，原有李树 y 棵，则

$\begin{cases}x+y=25\\(x+9)-(y+5)=17\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=19\\y=6\end{cases}$；或设原有桃树 x 棵，李树为 $(25-x)$，则 $(x+9)-(25-x+5)=17$

(2) 设乙开工 x 天后，两队完成整个铺设任务的 80%，

$(48+22+48)x+48=650\times 80\%$ $x=4$(天)

(3) 设慢车每小时行 x 千米，快车每小时行 y 千米，则

$\begin{cases}2y-2x=30\\\frac{300}{x}-\frac{1}{2}=\frac{300}{y}+\frac{1}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}x=60\\y=75\end{cases}$

(4) 设需 98% 硫酸 x 千克，则 $98\%x+85\times60\%=1000\times10\%$，$x=50$，需水量 $=1000-50-85=865$(千克)

练习二十五

1. (1) × (2) × (3) × (4) ✓ (5) × (6) × (7) ✓ (8) ✓

2. (1) ① $<$，② $<$，③ $>$，④ $<$，⑤ $>$，⑥ $<$

(2)

不等式 $ax<b$ 的解			图　示
$a>0$		$x<\frac{b}{a}$	
$a<0$		$x>\frac{b}{a}$	
$a=0$	$b>0$	一切实数	整个数轴
	$b=0$	无　解	/
	$b<0$	无　解	/

(3) $x<\frac{5}{2}$　(4) 1，2，$x<2\frac{1}{2}$　(5) 2 个

3. (1) D (2) C (3) C (4) C (5) C (6) C

4. (1) $x\geqslant\frac{8}{7}$

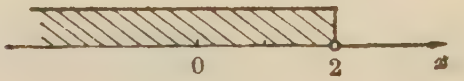


图 25-2′

(2) $x<2$

图 25-3′

(3) $1 \leqslant x \leqslant 21$

图 25-4′

(4) $x \geqslant \frac{11}{7a}$

图 25-5′

5. 若 $c>0$，则 $ac>bc$；若 $c=0$，则 $ac=bc$；若 $c<0$，则 $ac<bc$ **6**. $8 \leqslant a \leqslant 32$ **7**. 2 组，分别是 1、2、3 和 2、3、4

8. $a>-\frac{1}{15}$

练习二十六

1. (1) ϕ (2) $x<-1$ (3) $-5<x<-1$ (4) $x>1$ (5) $x>3$ 或 $x<-1$ (6) $-3, -2, -1, 0, 1$

2. (1) C (2) C (3) C (4) B (5) C

3. (1) $x>8$

图 26-1′

(2) $-5<x<9$

图 26-2′

(3) $-8<x \leqslant -2$

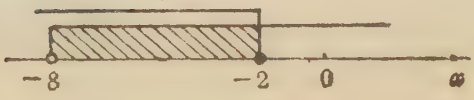


图 26-3′

(4) $x \leqslant 1$ 或 $x \geqslant 4$

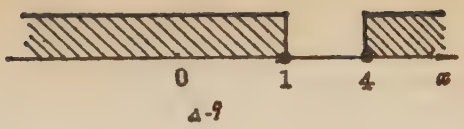


图 26-4′

(5) $0.1 < x < 1000$

图 26-5′

4. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

练习二十七

1. (1) C (2) D (3) D (4) C

2. (1) $-1 < x < \frac{3}{2}$ (2) $x > 3$ 或 $x \leqslant -2$ (3) $x > 1$ 或 $x = 0$ (4) 0, 1 (5) $x < \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ 或 $x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ (6) $x > 2$ 或 $x \leqslant \frac{1}{3}$

3. (1) 通分化简得 $-\frac{x-1}{x+1}$ (2) 去分母，化为整式方程解，并检验，得 $x = 1$ (3) 移项通分后解得 $-1 < x < 1$

练习二十八

1. (1) × (2) √ (3) √ (4) × (5) × (6) ×

2. (1) 1, x^3y^{-2} (2) a^8b^6 (3) -6.8345×10^{-4} (4) 32 (5) $-\frac{10}{3}$ (6) $\frac{1}{6}$ (7) $a^{-\frac{2}{3}}$ (8) $x \neq 3$ (9) $a \neq 0$ (10) 无意义

3. (1) D (2) A (3) B (4) C

4. $\sqrt[7]{a^3b^3}$ 与 $9^{\frac{1}{3}}$ 是最简根式

5. (1) 10 (2) -1 (3) $a^2\sqrt[9]{a^8}$ (4) $\sqrt[24]{x^{23}}$

(5) $\frac{1}{4m}\sqrt[5]{16m^4}$ (6) $\frac{\sqrt[11]{a^{11}b^7}}{a^2}$

6. (1) $2\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

7. 证明：$\because m^y=a^{xy}$，$n^x=a^{xy}$ $\therefore m^y\cdot n^x=a^{2xy}=a^{\frac{2}{z}}$

$\therefore xyz=1$

练习二十九

1. (1) 0 (2) $-\frac{3c}{5ab^2}\sqrt[6]{ab^2c^4}$ (3) $9a+4a^{-1}-13$

(4) $\sqrt[4]{mn}$

2. (1) D (2) B (3) B

3. (1) $\frac{b^4}{a^2}$ (2) a **4.** 1 **5.** $\sqrt{2}-1$ **6.** $\frac{1}{16}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 8 **8.** $x=-4$ **9.** $\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$

练习三十

1. (1) $\sqrt{2}+1$ (2) $\pm\sqrt{2}$ (3) -3 (4) $\sqrt{5}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{7}$，-3

2. (1) D (2) A (3) A、E；C；B、D (4) B

3. (1) $a=b>0$，且 $a\neq1$ (2) $d=1$，$c>0$，$c\neq1$

(3) $a>0$，$m>0$，$a\neq1$，$n<0$ (4) $x>0$，$x\neq1$

(5) $x>\frac{5}{3}$，且 $x\neq2$ (6) $x>0$，$x\neq1$

4. (1) 144 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 2 (4) 3 (5) $\sqrt[10]{5}$

(6) 7

5. $x=1$(舍去)，$x=-9$ **6.** 证明题略

练习三十一

1. (1) D (2) C (3) C

2. $\frac{11}{12}\log_5 a-\frac{1}{12}\log_5 b$ 3. $\frac{a\sqrt[3]{8ab}}{a+2b}$ 4. (1) 2.6532 (2) -2.8751 (3) 6.6445 5. $N=a^b c$ 6. (1) 0 (2) $1+\sqrt{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 5 7. 证明略 8. $\frac{1}{4}$

9. $\because \log_3 12=\log_3(3\times 2^2)=1+2\log_3 2=a$,

$\therefore \log_3 2=\frac{a-1}{2}$, $\therefore \log_3 24=\log_3 12+\log_3 2=a+\frac{a-1}{2}$

$=\frac{1}{2}(3a-1)$

练习三十二

1. (1) $-4^{-\frac{1}{5}}$, $4^{\frac{1}{5}}$, $4^{-\frac{1}{5}}$ (2) $x\neq 2$, $y\neq -1$ (3) $x=2$ (4) $x=-\frac{1}{3}$, $x=-3$, $x=-\frac{49}{3}$ (5) $x>10$

2. (1) C (2) D (3) A (4) C (5) C (6) B (7) A

3. 1 4. $\frac{4}{3}$ 5. (1) $2+a+b$ (2) $1+a+2b$

6. (1) a^2-2 (2) a^3-3a

7. (1) $102\frac{11}{48}$ (2) $1\frac{9}{11}$ (3) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ (4) $\frac{1}{64}y^{-\frac{1}{4}}$ (5) $2a+1$ (6) $1\frac{3}{4}$ (7) 1

8. $m=16$ 或 $m=1$ 9. -26 10. 证明略

练习三十三

1. (1) 0.002, 0.05, $\sqrt[10]{2}$, 200 (2) $10^4:1$ (3) -3, 0.5932 (4) $m^{-1}-m$

2. (1) B (2) D (3) E (4) B

3. (1) -4 (2) 4 (3) 2 (4) 0 (5) 2.5

4. (1) 证明略 (2) 2 **5**. -1 **6**. (1) 55 (2) 14

练习三十四

1. (1) D (2) C (3) C (4) B

2. (1) ① $2<x<4$， ② $x=3$ 或 $x=-4$(舍去)

(2) 提示：设 $3^{15a}=5^{5b}=15^{3c}=t$ (3) 由判别式可得 $a^2+b^2=c^2$ ∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形

3. 设平均每年降低 x，则 $(1-x)^3=1-40\%$

$x=15.65\%$

练习三十五

1. (1) 3750 (2) 1 (3) $\lg\frac{3}{2}$，$\frac{1}{\lg\frac{2}{3}}$，$\lg\frac{3}{2}$

(4) $\frac{m^2(m+n)^3}{m-n}$ (5) $-1<x<\frac{1}{2}$ (6) 600 (7) $m-1$

(8) -1

2. (1) D (2) C (3) C (4) D (5) C (6) C

(7) A

3. (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) 2

4. (1) -1 (2) 2 (3) $\frac{a+b}{3}+1$ (4) 1 (5) 证明：

$\lg y=\lg 10^{\frac{1}{1-\lg x}}=\frac{1}{1-\lg x}$，$z=10^{\frac{\lg x-1}{\lg x}}$，∴ $\lg z=\frac{\lg x-1}{\lg x}$，

$\lg x-\lg x\lg z=1$，$\lg x(1-\lg z)=1$，$\lg x=\frac{1}{1-\lg z}$，

$x=10^{\frac{1}{1-\lg z}}$

5. (1) 设经过 x 年，则 $a(1+18.5\%)^x=4a$， $x\approx 8.1$

∴ 经过9年

(2) 设每年增长的百分数为 x，则 $a(1+x)^7=6.2a$，

$x=0.298=29.8\%$

练习三十六

1. (1) $(a,-b)$，$(-a,b)$，$(-a,-b)$，(b,a)，$(-b,-a)$ (2)4或0 (3) 在Ⅰ、Ⅲ象限角平分线上，在Ⅰ、Ⅳ象限角平分线上，在坐标轴上 (4) $(3,0)$，$(0,4)$，$(-3,0)$，$(0,-4)$ 或 $(4,0)$，$(0,3)$，$(-4,0)$，$(0,-3)$

2. (1) $\left(\frac{5}{3},0\right)$，$(0,5)$ (2) $B(-1+\sqrt{3},0)$，$C(0,-1+\sqrt{3})$ 或 $B(-1-\sqrt{3},0)$，$C(0,-1-\sqrt{3})$

练习三十七

1. (1) 解析法，图象法，列表法 (2) $y=\frac{2}{5}x+5$，$0\leqslant x\leqslant 7.5$ (3) $x\leqslant 2$，且 $x\neq 1$ (4) $x\geqslant 3$，且 $x\neq 12,5$

2. (1) D (2) C (3) D

3. $y=\begin{cases}50x & (0\leqslant x\leqslant 3)\\ 150+60(x-3) & (3\leqslant x\leqslant 7)\end{cases}$

练习三十八

1. (1) 反比例 (2) $y=-5x+2$ (3) -1，Ⅱ、Ⅳ (4) $y_1>y_2$ (5) $h=-2$，$y=-5x+8$

2. (1) B (2) B (3) B

3. (1) $k=\frac{3}{4}$ (3) 9

练习三十九

1. (1) $y=2x+3$ (2) $k=1$

2. (1) 当 $x=1.5$ 时，$y_1=0$；当 $x>1.5$ 时，$y_1>0$；当 $x<1.5$ 时，$y_1<0$ (2) 当 $x=-5$ 时，$y_1=y_2$；当 $x<-5$

时，$y_1>y_2$；当 $x>-5$ 时，$y_1<y_2$

3. (1) $y=-x+2$ (2) $m=-1$，$AC=3\sqrt{2}$

练习四十

1. (1) $y=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6\frac{1}{4}$ $(0<a<1)$

(2) $y=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-5\frac{1}{4}$ (3) $y=x^2-8x+13$

(4) $a<0$，$b>0$，$c>0$，$b^2-4ac>0$

2. (1) B (2) D (3) A (4) A (5) C

3. $y=a(x-2)(x-6)$，$a>0$

4. $y=a(x-5)^2+k$，$a>0$，k 不定

5. $a_1=-1$，$b_1=6$，$c_1=-8$；$a_2=8\frac{1}{3}$，$b_2=-3\frac{1}{3}$，$c_2=-8$

练习四十一

1. (1) C (2) B

2. 腰长为 1 时，周长最大值为 5

3. $\frac{400\sqrt{3}-300}{13}$

练习四十二

1. (1) $(-2,7)$，$(-2,-17)$，$(2,-5+2\sqrt{42})$，$(2,-5-2\sqrt{42})$ (2) $x\geqslant-1$，且 $x\neq\pm\frac{1}{2}$ (3) $24-3x$，$4<x<8$ (4) $m=3$ (5) $z=\frac{6400}{y}$ (6) $\sqrt[3]{b}<k^3$，$b=0$ (7) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$，最小值为 2 (8) ① A(3，−4)，② D(0,5)，③ C(1，0)，B(5，0)，④ $x=3$，$x=3$ 时有最小值

2. (1) B (2) E (3) B (4) C (5) D

3. (1) $y=140-x$ $(0\leqslant x\leqslant 140)$

(2) $s=-x^2+100x+20000$

4. (1) $b=-2, k=-\frac{3}{4}$ (2) $s=14$

5. (1) $k<0$ 或 $k>4$ (2) $y=x^2-x-1$

练习四十三

1. (1) C (2) A (3) C (4) B

2. (1) 某班级学生身高的全体,这个班每一个学生的身高 (2) 9 (3) 2 (4) 70 (5) 0.2 (6) 甲 (7) 10, 26

练习四十四

1. (1) >0 或 <0 (2) 相等 (3) $\alpha=150°, \beta=150°$ 或 $45°$ (4) $P(5\sqrt{3}, 5)$

2. (1) C (2) B (3) D (4) D

3. (1) $\frac{13+6\sqrt{6}}{12}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) ① $>$, ② $>$

练习四十五

1. (1) cos, $(45°-\alpha)$, $(19°-\alpha)$, tg (2) 0.2588, $-\frac{12}{13}$, -2, -1 (3) $\alpha=\beta$ 或 $\alpha+\beta=180°$, $60°$ 或 $120°$, $60°$ (4) <0, >0, <0, $\lg^{\sin 155°}<\lg^{\cos 55°}$

2. (1) C (2) C (3) A (4) B

3. (1) ① -1, ② 0 (2) 0 (3) 由已知得 $\sin A\cdot\cos A=\frac{m^2-1}{2}$, 据韦达定理可得结论

练习四十六

1. (1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{7}}{3}$, $45°$ (3) $\bar{1}.9766$, $\alpha=76°38'$, 正数, 负数 (4) 12.2, $B=35°$

2. (1) C (2) D (3) A (4) B

3. (1) 三边分别为 2.8cm, 9.6cm, 10cm

(2) $m=\frac{1}{2}$, $A=B=45°$ (3) $c=2+2\sqrt{3}$

练习四十七

1. (1) 45°, 90° (2) $1200\sqrt{3}$mm² (3) 25.9cm, 35.9cm² (4) 外接圆半径为 57.5cm

2. (1) A (2) B

3. (1) $AB=13.4$ 米, $BC=19.5$ 米 (2) 156.8mm

练习四十八

1. (1) $a=4\sqrt{3}$, 无解, 31, 30° (2) 直角 (3) 4 (4) $a=\sqrt{3}$, $b=1$

2. (1) C (2) D (3) B

3. (1) 三边分别为 8, 10, 12 (2) 略 (3) 等腰三角形

练习四十九

1. (1) $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$ (2) 114°或246° (3) 60°或120° (4) 58°48′, 121°12′, 93°35′, 86°25′

2. (1) B (2) B

3. (1) $80\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{65}}{5}$ (3) 239 米 (4) $10\sqrt{13}$ 海里

练习五十

1. 用三角函数的定义 **2**. 用正弦定理 **3**. 用余弦定理 **4**. 用面积公式

练习五十一

1. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0 (2) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{11}}{33}$

(3) $25\sqrt{6}$, $\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{3}a$, a, $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

2. (1) D　(2) D　(3) A　(4) D

3. (1) $\sqrt{2}-\sqrt{3}-2$　(2) 2　(3) 2cm, 2.5cm, 3cm

(4) 等边三角形　(5) 钝角三角形　(6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$海里

练习五十二

1. (1) D　(2) B　(3) D　(4) C

2. (1) 8cm　(2) 40°, 160°　(3) 45°　(4) 97.5°

3. (1) 1.5cm, 4:5　(2) $\frac{1}{2}(\angle\alpha-\angle\beta)$

练习五十三

1. (1) B　(2) C　(3) D

2. (1) 62°　(2) 12°　(3) 42°和138°或都是10°

练习五十四

1. (1) C　(2) B　(3) A　(4) C　(5) C

2. (1) 2°　(2) 锐角三角形　(3) 12　(4) 1:2:3

(5) 5cm, 2cm

3. (1) 提示：延长CD交AB于G，则D为CG中点

(2) 提示：在AF上截取$AG=AC$，连结GE，可证$GE=EC$

练习五十五

1. (1) D　(2) B　(3) D　(4) A

2. (1) 45　(2) 30

3. (2) 提示：可证$\triangle ACE\cong\triangle DCB$, $\triangle MCE\cong\triangle NCB$

(3) 提示：连结AO、CO，由线段垂直平分线的性质知$AO=CO$，$BO=DO$，则可证$\triangle ABO\cong\triangle CDO$

练习五十六

1. (1) C (2) D (3) D (4) C

2. (1) $\sqrt{13}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ (3) $\frac{24}{5}$ (4) 45

3. (2) 提示：利用 30° 的直角三角形性质

练习五十七

1. (1) C (2) A (3) B (4) D (5) C

2. (1) $\frac{am}{n}$、$\frac{am}{p}$ (2) 等于 (3) 5 (4) 4，$2\sqrt{3}$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (5) 8cm

3. (2) 提示：过 D 作 $DG \parallel CA$ 交 BE 于 G，得 $BG=BD$，可证 $\triangle CAE \cong \triangle EGD$

(3) 提示：如图 57-7′，取 BC 的中点 G，连结 AG 并延长交 DC 的延长线于 H. 设正方形的边长为 a，则可得 $FH=AF=\frac{5}{4}a$，故 $\angle 3=\angle H$，又 $\angle 1=\angle H=\angle 2$.

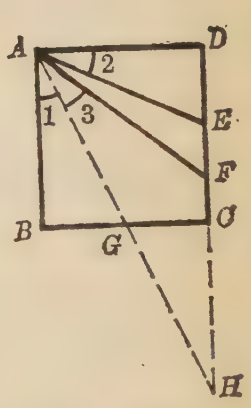


图 57-7′

$\therefore\ \angle BAF=2\angle DAE$.

(4) 提示：在 AB 上截取 $AG=AC$. 或延长 AC 至 G' 使 $AG'=AB$.

(5) 提示：如图 57-9′，过 E 作 $EG \perp AB$，G 为垂足，过 D 作 $DK \perp AC$，K 为垂足，可证 $CT=CD$，$KD=DH=EG$，$\angle 3=\angle B$. 则 $Rt\triangle CKD \cong Rt\triangle BGE$.

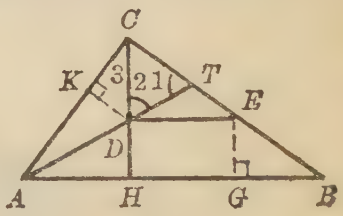


图 57-9′

练习五十八

1. (1) B (2) D (3) B

2. (1) 19cm，11cm (2) 2 (3) 30° (4) 如图

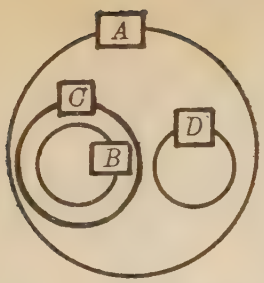


图 58-5′

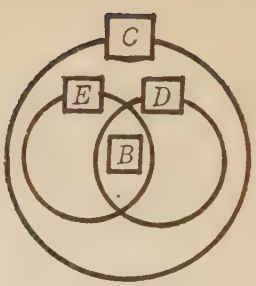


图 59-4′

3.（2）提示：由 $AO \perp BO$，AO 平分 $\angle DAB$，可证 $\triangle AEO \cong \triangle ABO$，故 $OB = OE$. 或利用等腰三角形三线合一性质。

（3）提示：连结 DE，证 $ME = DE = \frac{1}{2}AB$

练习五十九

1.（1）B，D，A，E，C （2）如图 59-4′ （3）A

2.（1）平行四边形 （2）平行四边形 （3）菱形 （4）矩形 （5）正方形 （6）矩形 （7）正方形

3.（1）提示：证 $AECF$ 是平行四边形且 $AF = FC$。

（2）提示：过 D 作 $DG \perp AB$ 于 G，则 $DF = DG = DE$。

（3）提示：连结 NF、AC、CF，NF 与 AC 交于 O，可证 $\triangle AON \cong \triangle COF$。

练习六十

1.（1）B （2）C （3）D （4）A

2.（1）25cm，35cm （2）50cm （3）菱形 （4）正方形

3.（1）提示：过 E 作 $EH \parallel DC$ 交 BC 于 H，作 $EG \parallel AB$ 交 BC 于 G，则 $\triangle GEH$ 为 $Rt\triangle$，F 为底边 GH 的中点。

(2) 提示：作梯形中位线 EF，可证 $EF=\frac{1}{2}AB$.

练习六十一

1. (1) D (2) C (3) D (4) B (5) A

2. (1) 180° (2) 9 (3) 60° (4) 4.4 (5) 30°

3. (2) 提示：如图 61-2′，过 E 作 $EG\perp AC$ 于 G，则 $EG=BO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}EC$. 故 $\angle 1=30°$. 由计算得 $\angle 2=\angle AEC=75°$.

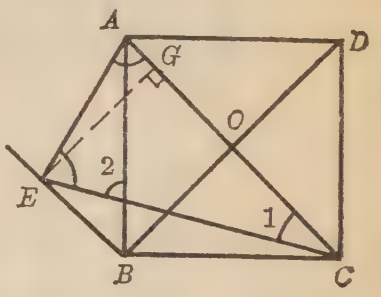


图 61-2′

练习六十二

1. (1) B (2) B (3) C (4) D

2. (1) $\frac{ph_1h_2}{h_1+h_2}$ (2) 1:1 (3) 39cm²

3. 21 **4.** 提示：连结 AE

练习六十三

1. (1) C (2) A (3) B (4) A

2. (1) 8, 5 (2) 4, 6, 10 (3) 10, 18

练习六十四

1. (1) C (2) D (3) D

2. (1) 2.5 (2) $\frac{4}{9}$ (3) 9 (4) $\frac{25}{64}$

3. (1) 提示：$Rt\triangle ABD\backsim Rt\triangle ACE$ (2) 提示：过 E 作 $EG\parallel AB$ 交 FB 于 G

练习六十五

1. (1) B (2) C

2. (1) 4, $4\sqrt{5}$ (2) $\frac{12\sqrt{2}}{7}$, $\frac{12}{35}$

3. (2) 提示：利用射影定理可计算得$\frac{h^2}{a^2}+\frac{h^2}{b^2}=1$

练习六十六

1. (1) C (2) D (3) B (4) D (5) A

2. (1) $\frac{4\sqrt{7}}{5}$, $\frac{6\sqrt{7}}{5}$ (2) 6, 2 (3) 16, 3:5, 9:16 (4) 5

3. (2) 提示：① 证 $EF \parallel AC$ ② 证 $BF=AB$

练习六十七

1. (1) D (2) C (3) B (4) B

2. (1) 6, 4 (2) 150°, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

3. (1) 提示：EA、FB、DC 平分 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ (2) 提示：延长 AO 交 $\odot O$ 于 F，连接 BF，则 $\triangle AOD \backsim \triangle ECD$

练习六十八

1. (1) B (2) C (3) B (4) D

2. (1) 15 (2) 4cm, 1:9 (3) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

练习六十九

1. (1) B (2) C (3) D (4) C

2. (1) $2\sqrt{6}$cm, 3cm (2) 60° (3) 16cm

3. 提示：过 P 作两圆外公切线

练习七十

1. (1) D (2) B (3) B (4) B (5) D

2. (1) 160° (2) $36\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{2}m$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}m$ (4) $\frac{2}{3}\pi R+2R$ (5) $\frac{27\pi}{2}$, $18+3\pi$

4. (1) $6\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

练习七十一

1. (1) D (2) C (3) B (4) D (5) D

2. (1) 60° (2) $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}:1$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (3) $\frac{b+c-a}{2}$ (4) 12 (5) $6\sqrt{3}$

3. 证明：如图 71-5′ 延长 CD、DC 分别与 $\odot O$、$\odot C$ 相交于 N、M 两点，则有 $EG\cdot GF=MG\cdot GD$，$EG\cdot GF=NG\cdot CG$，

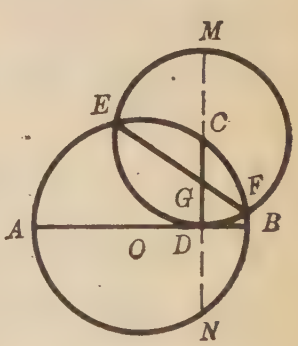


图 71-5′

$\therefore MG\cdot GD=NG\cdot CG$，

$\therefore \frac{MG}{CG}=\frac{NG}{GD}$ $\frac{MG-CG}{CG}=\frac{NG-GD}{GD}$，

即 $\frac{MC}{CG}=\frac{ND}{GD}$，$\because MC=ND=CD$，

$\therefore CG=GD$.

4. 解：$\because ABCDEF$ 为正六边形，P 在 $\overset{\frown}{AF}$ 上，$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，且它们的度数为 60°，$\therefore \angle APB=\angle BPC=30°$.

在 $\triangle APB$ 中，由余弦定理：

$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos30°$

$=PA^2+PB^2-\sqrt{3}PA\cdot PB$.

同理，在 $\triangle BPC$ 中，得 $BC^2=PB^2+PC^2-\sqrt{3}PB\cdot PC$.

$\because AB=BC$，$\therefore PA^2+PB^2-\sqrt{3}PA\cdot PB=PB^2+PC^2-\sqrt{3}PB\cdot PC$，$PC^2-PA^2=\sqrt{3}\cdot PB\cdot(PC-PA)$.

$\because PC\neq PA$，$\therefore PC+PA=\sqrt{3}PB$，

$\therefore \frac{PC+PB}{PB}=\sqrt{3}$.

练习七十二

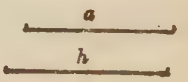
1. (1) C (2) B (3) D (4) C

2. (1) 逆命题：圆的两条弦所夹的弧相等，这两条弦平行；否命题：圆的两条不平行的弦所夹的弧不相等；逆否命题：圆的两条弦所夹的弧不相等，这两条弦不平行。(2) 以已知圆的圆心为圆心，以$\frac{R+r}{2}$和$\frac{R-r}{2}$为半径的两个同心圆。(3) 以O为圆心，以$\sqrt{R^2-a^2}$为半径的一个圆。(4) 平行于BC，且和BC所在直线的距离等于3cm的两条直线。

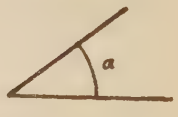
3. 所求轨迹是AB的垂直平分线(AB中点除外)。

练习七十三

2. CD的垂直平分线与$\angle AOB$的平分线的交点即为P点。



3. 作法：如图73-5′ (1) 作$BC=a$，(2) 作以BC为弦，所含圆周角等于$\angle\alpha$的两段弓形弧$B\overset{\frown}{m}C$、$B\overset{\frown}{n}C$，(3) 作和BC距离等于h的两条平行线交两弧于A、A_1、A_2、A_3，(4) 连结AB、AC。$\triangle ABC$即为所求作的三角形。此题最多可以画出四个三角形，但它们全等，故仍为一解。



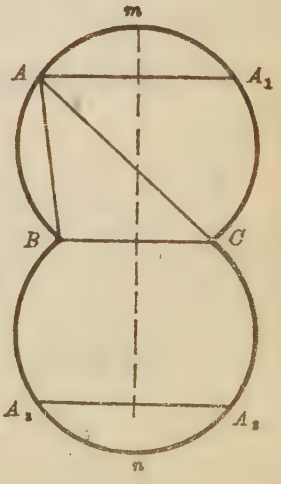


图 73-5′

练习七十四

1. (1) B (2) C (3) B

2. (1) 不是直径就不是圆的最大弦 (2) 线段AB的垂直平分线(O点除外)。(3) 以OA为直径的圆(点A除外)。(4) 以AB中

点为圆心，以$\frac{1}{6}AB$的长为半径的圆（圆与AB的两个交点除外）。

3．(1) 提示：作AB的垂直平分线与两条相交直线所成角的平分线，交点即为所求点P。

练习七十五

1．证明略。

2．连接OP、BP，证$\triangle QBP\cong\triangle CBP$。

3．作$GK\perp BC$于K，作$FH\perp AC$于H，证$\triangle GBK\cong\triangle FAH$。

4．连结OD，证$\angle CAD=\angle CDA$。

5．证出$\frac{FG}{DC}=\frac{EF}{ED}$，$\frac{FB}{DA}=\frac{EF}{ED}$，从而$\frac{FG}{DC}=\frac{FB}{DA}$，再由$DC=AD$，即得$FG=FB$。

练习七十六

1．证$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DF}$，得$\angle ABD=\angle DBC$，结合$BE\perp BD$，即得$BD$平分$\angle ABC$。

2．连结OD，改证$\angle ODA=\angle DAH$，通过$AH\parallel DO$即可。

3．作$\angle CAP'=\angle BAP$，取$AP'=AP$，连结CP'，PP'，得$\triangle ACP'\cong\triangle ABP$，再证$\angle CPP'=\angle CP'P$，$CP=CP'$，$CP=BP$。

4．连结OA、OB、OP，通过O、A、P、B四点共圆和A、C、B、D四点共圆及切割线定理证得O、C、P、D四点共圆，进而可得结论。

练习七十七

1．延长BD交AC于E，再利用三角形的外角定理。

2. 过 D 作 $DE \parallel CB$，在 $\triangle ADE$ 中，有 $\angle A < \angle AED = \angle B$.

3. 通过 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$，$\triangle PBM$ 和 $\triangle PCM$ 两组三角形中的关系来证。

4. 将 AP 旋转到 $\triangle ABC$ 形外来证。

5. 在斜边 AB 上取 $AE = AC$，作 $EG \perp AC$，$EF \perp BC$，得 $CD = EG = CF$，进而可得结论。

练习七十八

1. 本题有多种证法。其一可延长 PB 至 D，使 $BD = PC$，连结 AD，得 $\triangle ACP \cong \triangle ABD$，再证 $\triangle APD$ 为等边三角形.

2. 取 AB 之中点 N，连结 MN、DN，证 $\triangle DMN$ 为等腰三角形。

3. 延长 CB 至 E，使 $BE = DQ$，连接 AE，由 $\triangle ABE \cong \triangle ADQ$，可证得 $AP = DQ + BP$。

4. 连结 BO 交 $\odot O$ 于另一点 G，连结 GD，再通过弧的关系来证.

5. 连结 FD，通过 $\triangle COE \backsim \triangle CFD$ 及 BF 平分 $\angle CFD$ 来证。

练习七十九

1. 连结 PQ，再据弦切角、内角和定理可获证。

2. 延长 AB 交 $\odot O$ 于 F，连结 CF，再据四边形 $DFCE$ 内接于圆外角与内对角相等和三角形外角性质等来证。

3. 据外角性质。

4. $\because \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 180°$，

而 $\angle AEB + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 180°$，两式相减即得证。

5. 本题有多种证法。其一作 $\angle FAB$ 的平分线 AG 交 BC 于 G，又作 $GH\perp AF$ 交于 H，连结 GF，再证 $\triangle ABG\cong\triangle ADE$。

练习八十

1. 延长 CO 交 BA 延长线于 E，再证 $\triangle BCE$ 是等腰三角形。

2. 证中点四边形是菱形

3. 延长 BO 交 $\odot O$ 于 E，连结 AE，则 $\angle CAE=90°$，再证 $\angle ADC=\angle CAE$。

4. 过 P 作两圆的公切线交 AB 于 C，再证 $CA=CP=CB$。

5. 作 $\odot O$ 的直径 AF，并连结 BF，有 $AB\perp BF$，再证 $CD\parallel BF$。

练习八十一

1. 连结 O_1O_2、O_1A、O_2B，证 $\angle PAC=\angle PBD$。

2. 连结 AE，并延长交 BC 于 G，通过三角形的中位线来证。

3. 证 $AGCD$ 是平行四边形。

4. 证 $\overset{\frown}{HAE}=\overset{\frown}{GCF}$。

5. 证 $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{CF}{FD}$。

练习八十二

1. 通过 $FG\parallel AB$、$DF\parallel AB$，所得之比例线段来证。

2. 用圆幂定理。

3. 用角平分线性质、射影定理。

4. 作 $BF\parallel DE$，有 $\dfrac{PD}{DB}=\dfrac{PE}{EF}$，$AE=EF$，从而 $\dfrac{AD^2}{BD^2}=\dfrac{BD\cdot DP}{BD^2}=\dfrac{DP}{BD}=\dfrac{PE}{AE}$。

5．(1) 用相交弦定理；(2) 将 $DC=DF+FC$，$GC=GE+EC$ 代入(1)，化简后即得．

练习八十三

1．连接 AB，则 $\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，$\angle C=\angle BAD$，证得 $AE=BE$，再由 $\angle ABC=\angle CAD=\angle AFB$，证得 $AE=EF$．

2．把结论变为 $AA'-DD'=CC'-BB'$，作 $DE\perp AA'$、$BF\perp CC'$，证 $\triangle ADE\cong\triangle CBF$．

3．延长 BA 到 D，使 $AD=AC$，改证 $PB+PC>BD$．

4．由 $BM^2=DB\cdot AB$，$CM^2=EC\cdot AC$ 得 $\frac{DB}{BM}=\frac{BM}{AB}$，$\frac{EC}{CM}=\frac{CM}{AC}$，把 $\frac{BM}{AB}$、$\frac{CM}{AC}$ 分别代换 $\frac{DB}{BM}=\frac{EC}{CM}$，再根据角平分线性质可证．

5．连结 PM、PN，再根据弦切角性质．

6．延长 AE、AF 分别交 BC 于 D、G，再证 EF 是 $\triangle AGD$ 的中位线．

7．根据 $Rt\triangle$ 斜边上的中线性质和锐角关系来证．

8．连接 EF，有 $AE=EF$，改证 $BF=2EF$，即要证 $BF:EF=2:1$，通过 $\triangle BEF\backsim\triangle BDA$ 即得．

北京试卷

一 1．0，2　2．$\sqrt{2}a$　3．9:16　4．3，1　5．1，$\frac{\sqrt{3}}{2}$　6．任意实数　7．5　8．30°或150°　9．以 BC 中点为圆心，$\frac{1}{2}BC$ 为半径的圆(除去 B、C 点)　10．12.6

二 1．$y(x+2)(x-2)$　2．1　3．$1+3\sqrt{5}$　4．-1，2，0.5　5．$m>-3(m\neq-2)$

三 2. 3

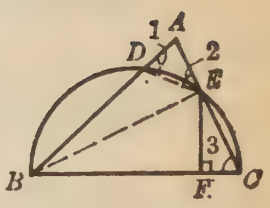
四 1. D 2. C

五 1. 63 2. $x_1=3$, $x_2=-1$

七 $y=\frac{2}{3}x-2$ 或 $y=-\frac{2}{3}x-2$

八 $2\sqrt{19}$

九 解：连结 BE、DE，∵ BC 为直径，∴ $\angle BEC=\angle AEB=Rt\angle$.



∴ $BE^2=AB^2-AE^2=64-4=60$. 又 $EF\perp BC$，∴ $BE^2=BF\cdot BC=\frac{5}{6}BC^2=60$. ∴ $BC=6\sqrt{2}$，∴ $EC=2\sqrt{3}$，∴ $AC=2+2\sqrt{3}$. ∵ B、D、E、C 共圆，∴ $\angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle ABC$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，∴ $AD=\frac{2}{8}\times(2+2\sqrt{3})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

南京试卷

一 1. 9，−3 2. $(2,-\sqrt{3})$，2 3. $x\geqslant\frac{1}{2}$ 4. 反比例，1 5. (3，4)，平行于 y 轴的直线 $x=3$，下 6. $\frac{5}{2}$ 7. P，$-P$ 8. 1:3 9. 10 10. 1:2 11. 7cm 或 3cm 12. $2\sqrt{2}$ 13. 10 14. $6R$，$\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 15. 72° 16. 平行于 17. $\angle AOB$ 的平分线

二 1. 3 2. $y=-x+2$ 3. $m>3$ 或 $m<-1$ 4. 7

四 $BD=5$，$DC=3$

五 1. $(x+y)(x-y)^2$ 2. (1) 3， (2) 1

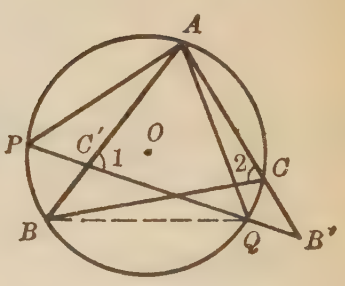
3. $\begin{cases}x_1=1\\y_1=4\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=4\\y_2=1\end{cases}$

六 1. C　2. D　3. C　4. B　5. A　6. A

七 $AB=4\text{cm}$, $CD=3.6\text{cm}$

八 10 天

九 证：(1) ∵ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C'$ 中，$AB=AB'$，$\angle BAC=\angle B'AC'$，$AC=AC'$，∴ $\triangle ABC\cong\triangle AB'C'$．　∴ $\angle 1=\angle 2$．



又 $\angle 1\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AQ}+\overset{\frown}{PB})$，$\angle 2\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{PB})$，

∴ $\overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{AQ}$，　∴ $\angle APQ=\angle AQP$．

(2) 连接 BQ，只要证 $\triangle AQB\backsim\triangle AC'Q$ 可证得．

杭州试卷

一 1. 3　2. 2　3. $(x+1)(x-1)$　4. $x<\frac{3}{2}$　5. 圆周　6. $0<c<10$　7. $y=\frac{1}{3}x$　8. 3π　9. 这两条弦的弦心距相等　10. 4.8

二 1. D　2. C　3. B　4. B　5. A　6. D　7. B　8. A　9. A　10. D

三 1. $1+2\sqrt{2}$　2. $x=3$

四 1. 15cm

六 $C=120°$，$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$

七 甲每小时走 5 千米，乙每小时走 4 千米

八 (2) 证法一：

圆内接四边形$ABCD \Longrightarrow \left.\begin{matrix} BE\cdot ED = AE\cdot EC \\ BE^2 = AE\cdot EC \end{matrix}\right\} \Longrightarrow BE = ED$

$\left.\begin{matrix} \\ \text{作 } BM \parallel FD,\ \text{交 } AC \text{ 于 } M \end{matrix}\right\}$

$\Longrightarrow \triangle BEM \cong \triangle DEC \Longrightarrow ME = CE \Longrightarrow MC = 2EC$

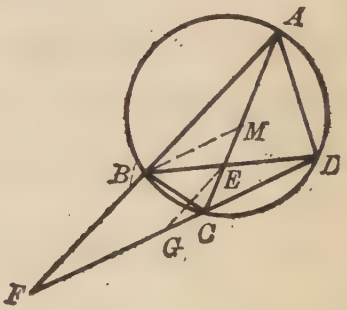
$\left.\begin{matrix} \\ BM \parallel FD \Longrightarrow \dfrac{AC}{MC} = \dfrac{AF}{BF} \end{matrix}\right\}$

$\Longrightarrow \dfrac{AC}{2EC} = \dfrac{AF}{BF} \Longrightarrow \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{2AF}{BF}$.

证法二：

圆内接四边形

$ABCD \Longrightarrow \left.\begin{matrix} BE\cdot ED = AE\cdot EC \\ BE^2 = AE\cdot EC \end{matrix}\right\}$



$\Longrightarrow BE = ED \Longrightarrow \dfrac{ED}{BD} = \dfrac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} \\ \text{作 } EG \parallel AF \text{ 交 } DF \text{ 于 } G \Longrightarrow \dfrac{EG}{BF} = \dfrac{ED}{BD} \end{matrix}\right\}$

$\Longrightarrow \dfrac{EG}{BF} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow EG = \dfrac{1}{2}BF$

$\left.\begin{matrix} \\ EG \parallel BF \Longrightarrow \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AF}{EG} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{AF}{\frac{1}{2}BF}$

$\Longrightarrow \dfrac{AC}{EC} = \dfrac{2AF}{BF}$.

九 解：(1) ∵ $\triangle MNP$ 是直角三角形，$\angle P = 90°$，

∴ $MP^2 + NP^2 = MN^2$，即 $(1-\sqrt{2})^2 + k^2 + (1+\sqrt{2})^2 + k^2 = 8$，∴ $k = -1$ ($k = 1$ 不合题意)。

∵ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 经过 M、N、P 三点，

$$\therefore \begin{cases} (1-\sqrt{2})^2 a + (1-\sqrt{2})b + c = 0. \\ (1+\sqrt{2})^2 a + (1+\sqrt{2})b + c = 0. \\ c = -1. \end{cases}$$

解得 $a=1$，$b=-2$，$c=-1$.

(2) $\triangle MNP$ 是钝角三角形，$\angle P$ 是钝角，由余弦定理得 $MP^2+NP^2<MN^2$，即 $(1-\sqrt{2})^2+k^2+(1+\sqrt{2})^2+k^2<8$，解得 $-1<k<0$.（$0\leqslant k<1$ 不合题意）. ∵ 这个二次函数的图象经过 M、N 两点，

$$\therefore \begin{cases}(1-\sqrt{2})^2a+(1-\sqrt{2})b+c=0.\\(1+\sqrt{2})^2a+(1+\sqrt{2})b+c=0.\end{cases}$$ 消去 b，得 $a=-c$.

∴ $a=-c=-k$，则 $0<a<1$.

南昌试卷

一 1. 0　2. $ab(a+b)(a-b)$　3. 67.5°　4. 对角线相等的四边形是等腰梯形　5. 2　6. 5　7. 1:9　8. $27a^3-8b^3$　9. 18　10. $\frac{16}{5}$cm　11. $\frac{2x_1+3x_2+5x_3}{10}$

二 1. D　2. A　3. D　4. C　5. A

三 1. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$　2. $14\frac{2}{3}$　3. $y=2x^2-8x+6$

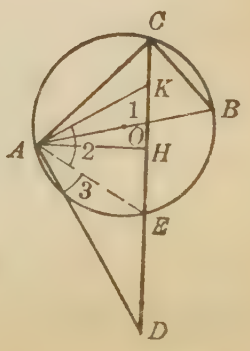
4. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

四 2. $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

五 汽车的速度为 45 千米/小时，自行车的速度为 15 千米/小时

六 1. $-4<m<\frac{1}{2}$　2. $m=14$

七 证：连结 AE. ∵ K 是内心，∴ $\angle ACK=\angle BCK$，$\angle CAK=\angle BAK$. 又 ∵ $\angle BCK=\angle BAE$，∴ $\angle AKE=\angle ACK+\angle CAK=\angle BAE+\angle BAK=\angle KAE$，∴ $KE=AE$. 又 ∵ E 为

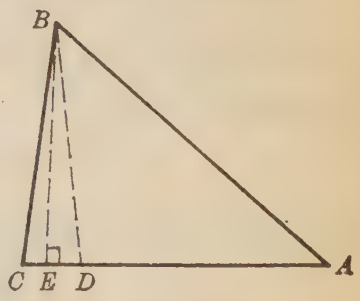


KD 中点，$\therefore KE=DE$，$\therefore AE=DE$，$\therefore \angle EAK=\angle EDA$. $\therefore \angle KAD=\angle KAE+\angle EAD=\frac{1}{2}(\angle AKE+\angle KAE+\angle EAD+\angle EDA)=90°$.

$\therefore S_{\triangle KAD}=\frac{1}{2}AK\cdot AD=\frac{1}{2}KD\cdot AH$.

$\therefore AK\cdot AD=KD\cdot AH=2KE\cdot AH$，$\therefore \frac{AH}{AD}=\frac{AK}{2KE}$.

八 解：如图，可设 $BC=a$，则 $AC=a+1$，$AB=a+2$，作 $BD=a$ 交 AC 于 D，作 $BE\perp AC$，垂足为 E，则 $\angle BDC=\angle C=2\angle A$. 又 $\angle BDC=\angle A+\angle ABD$，



$\therefore \angle ABD=\angle A$，$\therefore AD=BD=BC=a$，$\therefore CD=1$.

又 $\because BC=BD$，$BE\perp CD$，$\therefore E$ 为 CD 中点，

$\therefore ED=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}$. $\because \angle AEB=Rt\angle$，$\therefore AB^2=AE^2+BE^2=BD^2-DE^2+AE^2$.

$\therefore (a+2)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+a^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$. $\therefore a^2-3a-4=0$.

$\therefore (a-4)(a+1)=0$. $\therefore a=4$ 或 $a=-1$.(舍去)

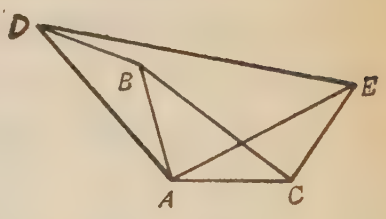
$\therefore a+1=5$，$a+2=6$. $\therefore$ 三角形的三边分别长为 4、5、6.

福建试卷

一 1. a^{m+1} 2. $2x^2+5x-3$ 3. ± 4 4. $(a-b)(x-1)$ 5. ± 2 6. $x=\frac{a+mb}{1+m}$ 7. $\log_2 7$ 8. $\frac{1}{4}$ 9. $-\frac{4}{5}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. 九 12. 3:1 13. 有两个内角互余的三角形是直角三角形 14. $>$ 15. $mn\sin\alpha$

二 1. D 2. B 3. B 4. C 5. D 6. A

三 1. 证明：在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 中，$AD=AE$，$AB=AC$，$\angle DAB=\angle DAE-\angle BAE$，$\angle EAC=\angle BAC-\angle BAE$.



$\because \angle BAC=\angle DAE$，$\therefore \angle DAB=\angle EAC$. $\therefore \triangle ADB\cong\triangle AEC$，$\therefore BD=CE$。

四 1. $x=-4$ 2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 3. $a=-\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{5}$

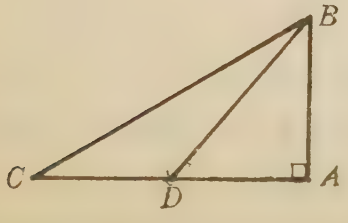
五 1. 解法一：设 $AB=1$，$\because \angle A=Rt\angle$，$\angle C=30°$，$\therefore BC=2$，$AD=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由勾股定理得

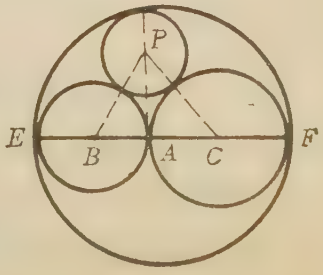
$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 由正弦定理得：

$\frac{\sin\angle DBC}{CD}=\frac{\sin C}{BD}$，$\therefore \sin\angle DBC=\frac{CD\cdot\sin C}{BD}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

解法二：作 $DE\perp BC$ 于 E，设 $AB=1$. $\because \angle A=Rt\angle$，$\angle C=30°$，$\therefore BC=2$，$AD=CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DE=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\because BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$，





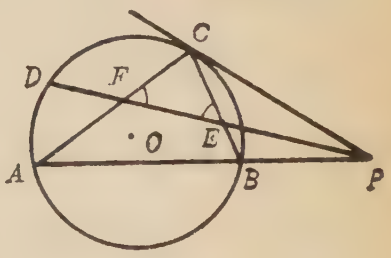
$$\therefore \sin\angle DBC=\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

2. 连结 BP、CP、AP. 设 $AC=r$. … $EF=4r=6$.

六 甲 4 天，乙 8 天

七 2. 证法一：由三角形内角平分线性质可得：

$\frac{BE}{CE}=\frac{PB}{PC}$, $\frac{CF}{AF}=\frac{PC}{PA}$.



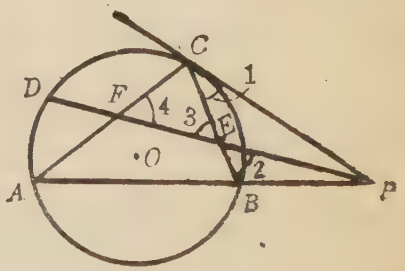
∵ PC 为 $\odot O$ 的切线，∴ $PC^2=PB\cdot PA$，即 $\frac{PB}{PC}=\frac{PC}{PA}$,

∴ $\frac{BE}{CE}=\frac{CF}{AF}$. 又 ∵ $CE=CF$,

∴ $CF^2=AF\cdot BE$.

证法二：如图，∵ $\angle CPE=\angle APF$, $\angle 1=\angle A$,

∴ $\triangle AFP\backsim\triangle CEP$, ∴ $\frac{AF}{CE}=\frac{PF}{PE}$. 又 ∵ $CE=CF$, $\angle 2=\angle 3=\angle 4$, ∴ $\triangle BEP\backsim\triangle CFP$. ∴ $\frac{CF}{BE}=\frac{PF}{PE}$.



∴ $\frac{AF}{CE}=\frac{CF}{BE}$, ∴ $CF^2=AF\cdot BE$.

八 解：(1) 令 $x^2-(m-3)x-m=0$,

则 $\Delta=(m-3)^2+4m=m^2-2m+9=(m-1)^2+8>0$.

∴ 抛物线与 x 轴总有两个交点。

(2) 设抛物线与 x 轴的两个交点坐标为 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$，则两点的距离为 $|x_1-x_2|$. ∵ $|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)=(x_1$

$+x_2)^2-4x_1x_2=(m-3)^2+4m=m^2-2m+9$，$\therefore\ m^2-2m+9=3^2$。 $\therefore\ m=0$ 或 $m=2$。$\therefore$ 当 $m=0$ 或 $m=2$ 时，抛物线与 x 轴两交点的距离等于 3。

(3) 假设有某个 m 的值，使抛物线与 x 轴的两交点都落在 x 轴的正半轴上，即 $x_1>0$，$x_2>0$，因此有：

$$\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1\cdot x_2>0\end{cases},\ \therefore\ \begin{matrix}m-3>0\\-m>0\end{matrix}\Longrightarrow\begin{cases}m>3\\m<0\end{cases}\ \text{无解。}$$

所以假设是错误的，故原命题正确。

上海部分中学直升试卷

一 1. B 2. B 3. C 4. D 5. C

二 1. 3，2 2. 9:1 3. -1 4. $10\sqrt{3}$ cm、60°

5. $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ 6. 60°，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}$ 7. 30° 或 150° 8. $\pm\sqrt{2}$ 9. $\frac{bc}{h}$ 10. 垂直于 AB 的一条直径（直径端点及圆心 O 除外）

三 2

四 $\sin A=\frac{\sqrt{21}}{5}$，$\cos A=-\frac{2}{5}$

五 解 (1) 设三角形两角为 A、B，内切圆半径为 r，则

$$\begin{cases}A+B=120^\circ\\\sin A:\sin B=8:5\\2\pi r=4\sqrt{3}\,\pi\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}C=60^\circ\\a:b=8:5\\r=2\sqrt{3}\end{cases}$$

令 $a=8k$，$b=5k(k>0)$，由余弦定理得，

$c^2=(8k)^2+(5k)^2-2\cdot 8k\cdot 5k\cdot\cos 60^\circ=49k^2$。取 $c=7k$。

$\because\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)r$，

$\therefore\ 8k\cdot 5k\cdot\sin 60^\circ=(8k+5k+7k)\cdot 2\sqrt{3}$，解得 $k=2$。

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=40\sqrt{3}$.

(2) $\because c=7k=14$, $\sin C=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 由正弦定理得, $\frac{c}{\sin C}=2R$ $\therefore R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

(3) $\because a=16$, $b=10$, $c=14$, $\therefore b$ 为最小边, B 为最小角. 由余弦定理得, $\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{16^2+14^2-10^2}{2\times 16\times 14}=\frac{11}{14}$.

$\because \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$,

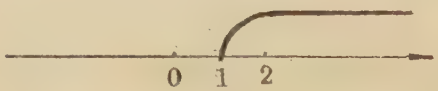
$\therefore \operatorname{tg}B=\frac{5\sqrt{3}}{11}$.

上海试卷

一 (1) -1 (2) 3 (3) 0 (4) 2 (5) 0 (6) $\log_3 9=2$ (7) $(a-2)(a^2+2a+4)$ (8) ± 2 (9) -1 (10) 2 (11) $x\leqslant 2$ (12) $-\sqrt{2}$ (13) $y=-\frac{1}{2}x$ (14) <0 (15) 1.56 (16) 2 (17) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (18) 60° 或 120° (19) $3\sqrt{3}$ (20) 相等或互补 (21) 直角三角形 (22) 3 (23) 4 (24) 115 注: 第(11)、(20)题, 凡漏一解扣 1 分; 第(25)题如无构图线, 不给分.

二 (1) A (2) D (3) B (4) C (5) D

三 (1) $x\geqslant 1$



注: 若在 1 处画空心圈扣 1 分 (2) $x=\pm\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{3}-1$　(4) $AC=2$

四 $y=-\frac{3}{2}x-1$，函数图象在 y 轴上，截距为 -1

五 略

六 (1) ∵ PQ 是两圆的公切线，∴ $SP^2=SA\cdot SB$，$SQ^2=SA\cdot SB$，∴ $SP^2=SQ^2$，$SP=SQ$，∴ $SQ:SP=1$。

(2) 设 $MC=x$. $CT=y$，则 $MD=MT=x+y$.

∵ $CT^2=CB\cdot CA=CD\cdot CM$，∴ $y^2=(2x+y)x$.

$y^2=2x^2+xy$，即 $2x^2+xy-y^2=0$. ∴ $(2x-y)(x+y)=0$.

∵ $x+y>0$，∴ $2x=y$. ∴ $x:y=1:2$. 即 $CM:CT=1:2$.

七 (1) 由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$

$=\sqrt{20^2+15^2}=25(\text{cm})$. ∴ $CM=\frac{1}{2}AB=12.5(\text{cm})$

(2) 作 $CD\perp AB$、$PN\perp AB$，垂足为 D、N. ∵ $\triangle APB$ 和 $\triangle ACB$ 为同底的两个三角形，

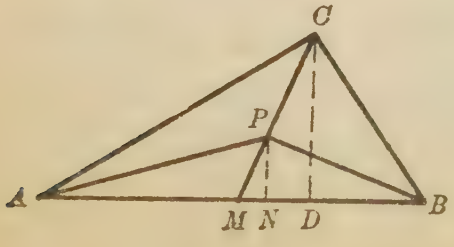
∴ $\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{PN}{CD}$，而 $CD\parallel PN$，∴ $\frac{PN}{CD}=\frac{PM}{CM}=\frac{12.5-x}{12.5}$.

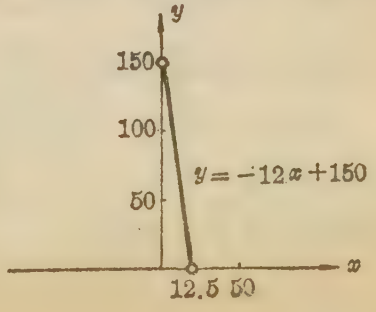
∵ $S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\times 20\times 15=150(\text{cm}^2)$，

∴ $S_{\triangle APB}=150\times\frac{12.5-x}{12.5}=150-12x$.

即 $y=-12x+150$.

(3) 作函数图象。在 x 轴上于 50 的 $\frac{1}{4}$ 长处画小圈，在 y 轴上





于150处画小圈，将两小圈用线段连结，则此线段即表示函数 $y=-12x+150$ 的图象。图象中不包含(12.5，0)及(0，150)两点。

注：(3)中，若将(12.5，0)及(0，150)两点画成实点，扣1分。若将线段画成直线或射线，扣1分。若将点(12.5，0)取在区间(0，25)外，不给分。

综合练习一

一 1. D 2. C 3. D 4. B 5. C

二 1. x^2+4x-3 2. Ⅱ 3. $\frac{1}{5}$ 4. -1 5. 7:6

6. 54° 7. 28 8. $\frac{3}{2\pi}l$，$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}l$ 9. $-3\sqrt{3}$

10. $\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ 11. $y=-\frac{3}{4}x+3$ 12. $\sqrt{2}$ 13. 7

四 $AB=17(\sqrt{6}-2)$，$AC=17(3-\sqrt{6})$

五 (1) 提示：连结 AM，过 O 作 PN 的垂线交 PN 于 C。可得 $PM=5$。再由切割线定理得 $\odot A$ 的半径为 $\frac{5\sqrt{6}}{12}$。

(2) $\log_5\sin P=-1$ (3) 提示：$S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}\cdot BN\cdot AB\cdot\sin B$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{4}\cdot\cos P=\sqrt{6}$。

六 (1) 提示：M、N 分别为 $\triangle ABD$、$\triangle CBD$ 的重心。(2) 提示：连结 MB、GC，可证 B、C、G、M 四点共圆。

七 (1) 提示：利用韦达定理 (2) 提示：利用判别式及勾股定理 (3) 提示：利用 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 及余弦定理 $B=120°$。

综合练习二

一 1. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $x\geqslant 2$，且 $x\neq 3$ 4. 45°

5. $2\sqrt{3}a$ 6. $0<k\leqslant\frac{1}{4}$ 7. $(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

8. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 9. -2 10. ± 9，$-\frac{2}{3}$ 11. 24cm^2，矩

12. $\frac{\sqrt{51}}{3}$ 13. $(-2,-3)$，6 14. 各内角不都等于 60° 的三角形不是等边三角形 15. 等腰三角形 16. $\sqrt{65}$

17. 4

二 1. D 2. D 3. C 4. B 5. B

三 1. 6 2. $\frac{31-3\sqrt{2}}{3}$

四 1. $x=1$ 2. $x\leqslant 3$，正数解为 $0<x\leqslant 3$，数轴上表示如图 99-1′

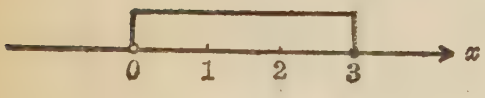


图 99-1′

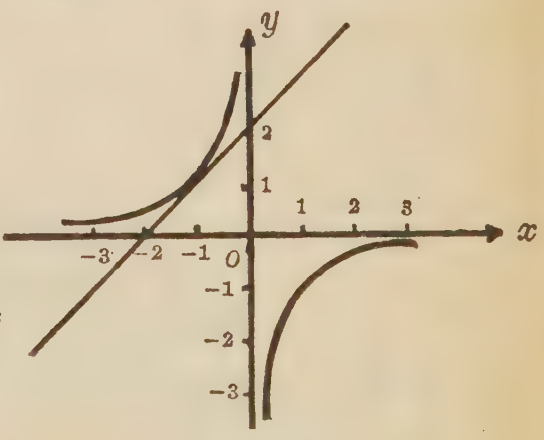


图 99-2′

五 (1) $y=x+2$，$y=-\frac{1}{x}$；(2) 如图 99-2′.

六 1. (1) 提示：先证明 $PD=PB$，再用切割线定理；(2) 提示：利用“同高的两个三角形的面积比等于它们底边的比”及角平分线性质。 2. 提示：连结 DE。

七 (1) $m=20$； (2) $S_{\triangle ABC}=24$； (3) 当$\triangle ABC$为等腰直角三角形时面积最大，最大面积为25.

综合练习三

一 1. 0　2. $\pm 2\sqrt{10}$　3. $x<0$, $y<0$　4. 22cm

5. 2　6. $\frac{1}{2}$cm　7. 0.05

8. $-2\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$　9. $-1<x<1$

10. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　11. $\frac{|b|}{2}=\begin{cases}\frac{b}{2} & (b>0)\\ -\frac{b}{2} & (b<0)\end{cases}$　12. 24cm

13. $x\neq -\frac{b}{2}$的实数　14. 2　15. $\frac{m-1}{n}$

二 1. D　2. B　3. B

4. A　5. A　6. D

三 1. $-\frac{5}{2}$　2. 0

3. $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

4. (1) $y=\frac{2}{x}+3$　(2) $y=5$

四 提示：连结AE、BE

五 24cm

六 $2\sqrt{3}$

七 提示：连结CD.

八 (1) $y_2=x^2-2x-3$；

(2) 如图100-1′；

(3) 当 $-2<x<2$ 时，$y_1>y_2$

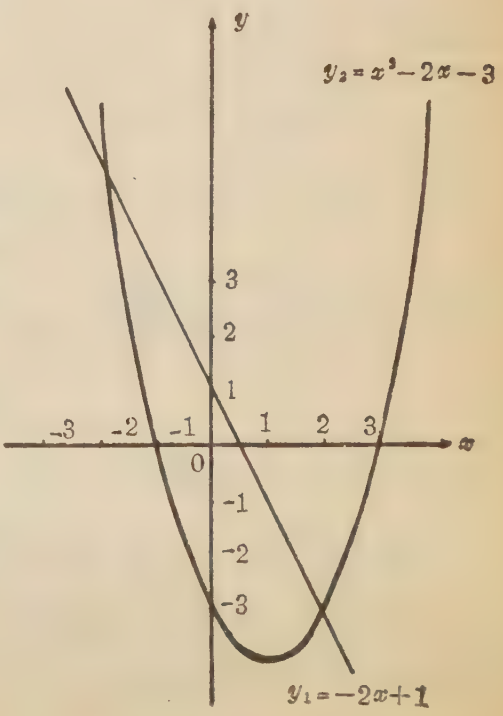


图 100-1′

初中数学辅导100天

上海市上海中学编写组　编

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路393号）

各地新华书店经销　　上海市印刷三厂印刷

开本787×1092　1/32　印张13　　插页6　字数286000

1989年6月第1版　　1991年4月第5次印刷

印数：437,901—670,600

ISBN 7-5428-0264-X

G·265

定价：3.70元

责任编辑　张莉琴
封面设计　张瑞邦

ISBN 7-5428-0264-X/G·265
定　　价：　　3.70 元